Prof. Dr. P. S. Jossen
M. Wellershoff

Frühlingssemester 2018

Komplexe Analysis D-ITET

ETH Zürich
D-MATH

Serie 13

Hinweise: Diese Serie ist deutlich länger als alle anderen Serien dieses Semesters. Die Idee ist dabei, dass Sie nicht die ganze Serie innerhalb der nächsten Woche lösen, sondern diese als eine Aufgabensammlung zur Vorbereitung auf die Prüfung im August ansehen. Die Aufgaben sind generell so zusammengestellt, dass sie ein hervorragendes Training für die Prüfung darstellen. Wenn Sie die Aufgaben lösen, dann stoppen Sie doch die Zeit, welche Sie dafür benötigen.

Aufgabe 13.1 Anwendungen des Residuensatzes

(13.1a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$

In der Prüfung nicht vergessen $\cdot \frac{1}{2}$ zu rechnen am Schluss

(13.1b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x.$$

(13.1c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^6+1}\,\mathrm{d}x.$$

(13.1d) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x.$$

(13.1e) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

(13.1f) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

(13.1g) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

indem Sie die trigonometrische Formel $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ benutzen.

(13.1h) Sei $k > 0$ und $s > 0$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sx}{k^2 + x^2} \, \mathrm{d}x.$$

(13.1i) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5 - 4\cos\theta} \, \mathrm{d}\theta.$$

(13.1j) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a\cos\theta + a^2} \, \mathrm{d}\theta,$$

für:

i. $|a| < 1$,

ii. $|a| > 1$.

(13.1k) Sei $0 < a < 1$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{1 + \mathrm{e}^{x}} \, \mathrm{d}x,$$

indem sie über den Weg γ in Abbildung 13.1 integrieren.

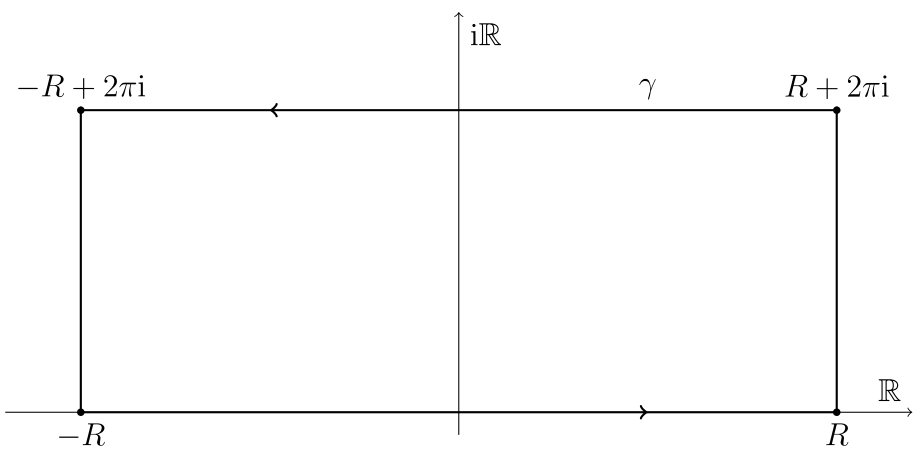


Abbildung 13.1: Der Weg zur Verwendung in Aufgabe (13.1k).

(13.1l) Sei $-1 < a < 1$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{\cosh x} \, \mathrm{d}x,$$

indem sie über den Weg γ in Abbildung 13.2 integrieren.

Aufgabe 1:

Aufgabe 13.1 Anwendungen des Residuensatzes

(13.1a) Berechnen Sie das Integral

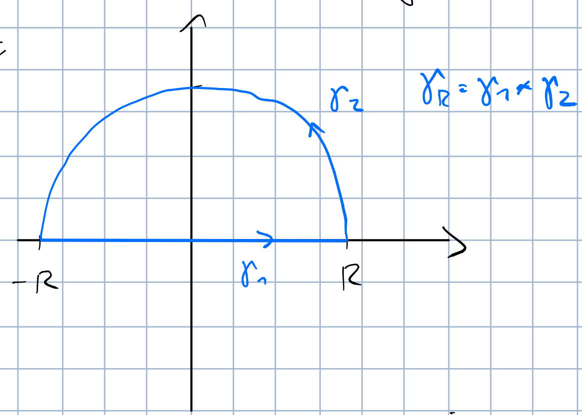
$$\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$

$\to$ gerade Fkt $f(-x) = f(x)$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$$

Definieren nun eine komplexe Fkt: $f(z) = \dfrac{z^2}{1+z^4}$

Wir wenden den Residuensatz an und integrieren über folgende Weg mit $R \to \infty$:



Es gilt

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_i)>0} \operatorname{Res}(f(z)|z_i)$$

Dies dürfen wir allerdings nur, wenn wir zeigen können, dass das Integral $\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$ ist, denn dann folgt folgendes:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \overbrace{\int_{\gamma_2} f(z)\,dz}^{0} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_i)>0} \operatorname{Res}(f(z)|z_i)$$

Wir zeigen also mittels einer Abschätzung:

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| = \left|\lim_{R\to\infty} \int_0^1 \frac{R^2 e^{2\pi i t}\, R\pi i e^{\pi i t}}{1+R^4 e^{4\pi i t}}\,dt\right| \le \lim_{R\to\infty} \int_0^1 \frac{R^3\pi}{R^4-1}\,dt = \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \frac{R^3\pi}{R^4-1}\,dt$$

$$= \int_0^1 0\,dt = \underline{\underline{0}}$$

Somit dürfen wir obige Formel benutzen und berechnen mittels Residuensatz:

Residuen: $z^4+1=0 \Rightarrow z^4=-1=e^{\pi i} \Rightarrow z_1=e^{\frac{\pi i}{4}}$ $\quad z_2=e^{\frac{3\pi i}{4}}$

$\underline{z_3=e^{\frac{5\pi i}{4}} \quad z_4=e^{\frac{7\pi i}{4}}}$

Uns interessieren nur z_1 & z_2, beides einfache Polstellen:

$$\mathrm{Res}(f(z)|z_1)=\frac{p(z_1)}{q'(z_1)}=\frac{z_1^2}{4z_1^3}=\frac{e^{\frac{\pi i}{2}}}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}}=\frac{1}{4}e^{\frac{\pi i}{2}-\frac{3\pi i}{4}}=\frac{1}{4}e^{-\frac{\pi i}{4}}$$

$$\underline{=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}$$

$$\mathrm{Res}(f(z)|z_2)=\frac{e^{\frac{6\pi i}{4}}}{4e^{\frac{9\pi i}{4}}}=\frac{1}{4}e^{\frac{6\pi i}{4}-\frac{9\pi i}{4}}=\frac{1}{4}e^{-\frac{3}{4}\pi i}=\underline{\frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+1}\,dx=\pi i\,\frac{1}{4}\left(\cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}i-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\underline{\underline{+\frac{\sqrt{2}}{4}\pi}} \checkmark$$

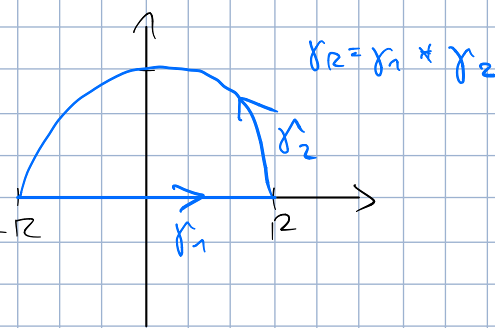
(13.1b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x.$$

Wir sehen $\deg(\text{Nenner}) \geq \deg(\text{Zähler})+2$

Wir definieren eine kompl. Fkt.: $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+1)(z^2+4)}$

und wollen den Residuensatz anwenden. Dafür integrieren wir über folgenden Weg: mit $R\to\infty$



Laut Residuensatz gilt:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_i)>0} \mathrm{Res}(f(z)|z_i)$$

Wir zeigen, dass mit $\gamma_1(t)=-R+2Rt$, $t\in[0,1]$ und

$\gamma_2(t)=Re^{i\pi t}$, $t\in[0,1]$

folgendes gilt:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz=\int_{\gamma_1} f(z)\,dz+\int_{\gamma_2} f(z)\,dz=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(z)\,dz+\lim_{R\to\infty}\underbrace{\int_0^1 \frac{R^2e^{2\pi i t}\,R\pi i e^{\pi i t}}{(R^2e^{2\pi i t}+1)(R^2e^{2\pi i t}+4)}\,dt}_{(*)}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

Dafür müssen wir aber zeigen, dass $(*) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$:

$$\left|\lim_{R\to\infty} \int_0^1 \frac{R^3 e^{2\pi i t} \pi i e^{\pi i t}}{(R^2 e^{2\pi i t}+1)(R^2 e^{2\pi i t}+9)} dt\right| \leq \lim_{R\to\infty} \int_0^1 \frac{R^3 \pi}{(R^2-1)(R^2-4)} dt = \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \frac{R^3 \pi}{(R^2-1)(R^2-4)} dt$$

$$= \int_0^1 0\, dt = \underline{\underline{0}}$$

$\Rightarrow$ Nun können wir den Residuensatz anwenden und berechnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{Im(z_i)>0} Res(f(z)|z_i)$$

Residuen: $z^2+1=0$ und $z^2+4=0$

$\Rightarrow$ $z_1 = i$ $z_2 = -i$ $z_3 = 2i$ $z_4 = -2i$, davon interessieren uns nur z_1 & z_3 mit Imag. >0, beides einfache Polstellen

$$Res(f(z)|z_1) = \lim_{z\to z_1} (z-z_1) f(z) = \lim_{z\to i} \cancel{(z-i)} \frac{z^2}{(z+i)\cancel{(z-i)}(z^2+4)}$$

$$= \frac{-1}{2i(-1+4)} = \frac{-1}{6i} = \underline{\frac{1}{6} i}$$

$$Res(f(z)|z_3) = \lim_{z\to z_3} (z-z_3) f(z) = \lim_{z\to 2i} \cancel{(z-2i)} \frac{z^2}{(z^2+1)(z+2i)\cancel{(z-2i)}}$$

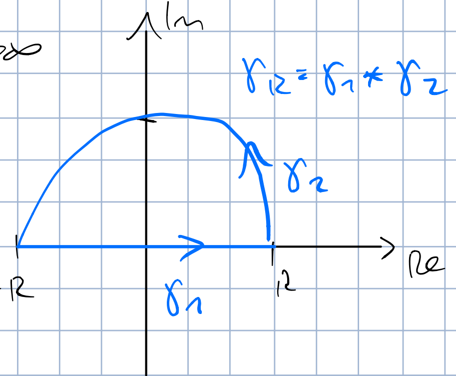
$$= \frac{-4}{(-4+1)\,4i} = \frac{4}{12i} = \underline{-\frac{1}{3} i}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = 2\pi i \left(\frac{1}{6} i - \frac{1}{3} i\right) = \underline{\underline{\frac{1}{3}\pi}}$$ ✓

(13.1c) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^6+1}\,dx. \quad \Rightarrow \text{Gerade Fkt?} \Rightarrow \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1}\,dx$$

Bilden eine kompl. Fkt: $f(z) = \frac{1}{z^6+1}$ und wollen Residuensatz anwenden über folgenden **Weg**: mit $R \to \infty$



Laut Residuensatz gilt:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{Im(z_i)>0} Res(f(z)|z_i)$$

Des Weiteren gilt: $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$ mit den beiden Wegen $\gamma_1(t) = -R + 2Rt$, $t \in [0,1]$, $\gamma_2(t) = Re^{\pi i t}$, $t \in [0,1]$

Wir zeigen dass

$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$ und somit $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

gilt und damit dann $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{Im(z_i)>0} Res(f(z)|z_i)$;

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| = \left|\lim_{R\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{R^6 e^{6\pi i t}+1} R\pi i e^{\pi i t}\,dt\right| \leq \lim_{R\to\infty} \int_0^1 \frac{R\pi}{R^6-1}\,dt$$

$$= \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \frac{R\pi}{R^6-1}\,dt = \int_0^1 0\,dt = \underline{\underline{0}}$$

Residuen: $z^6 + 1 = 0 \Rightarrow z^6 = -1 = e^{\pi i} \Leftrightarrow z_1 = e^{\frac{\pi i}{6}}$, $z_2 = e^{\frac{3\pi i}{6}}$, $z_3 = e^{\frac{5\pi i}{6}}$, $z_4 = e^{\frac{7\pi i}{6}}$, $z_5 = e^{\frac{9\pi i}{6}}$, $z_6 = e^{\frac{11\pi i}{6}}$

Von Interesse sind nur z_1, z_2, z_3 mit Imaginärteil >0 und einfache Polstelle:

$$Res(f(z)|z_1) = \frac{q(z_1)}{p'(z_1)} = \frac{1}{6z_1^5} = \frac{1}{6e^{\frac{5\pi i}{6}}} = \frac{1}{6}e^{-\frac{5\pi i}{6}} = \underline{\frac{1}{6}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)}$$

$$Res(f(z)|z_2) = \frac{1}{6z_2^5} = \frac{1}{6e^{\frac{15\pi i}{6}}} = \frac{1}{6}e^{-\frac{\pi i}{2}} = \underline{-\frac{1}{6}i}$$

$$\mathrm{Res}(f(z)|z_3) = \frac{1}{6z_3^5} = \frac{1}{6e^{\frac{25\pi i}{6}}} = \frac{1}{6}e^{-\frac{\pi i}{6}} = \underline{\frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^6+1}\,dx = \pi i\left(\cancel{\frac{\sqrt{3}}{12}} - \cancel{\frac{\sqrt{3}}{12}} - \frac{1}{12}i - \frac{1}{12}i - \frac{1}{6}i\right)$$

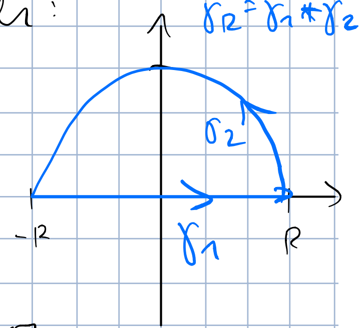
$$= \underline{\underline{\frac{\pi}{3}}} \checkmark$$

(13.1d) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx.$$

Bilden komplex. Fkt: $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^3}$

Wollen Residuensatz über folgende Weg anwenden: mit $R \to \infty$



Laut Residuensatz gilt:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_i)>0} \mathrm{Res}(f(z)|z_i)$$

mit $\gamma_1(t) = -R + 2Rt$, $t \in [0,1]$, $\gamma_2(t) = Re^{\pi i t}$, $t \in [0,1]$

Wir zeigen $\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$, sodass dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_i)>0} \mathrm{Res}(f(z)|z_i)$$

$$\Rightarrow \left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| = \left|\lim_{R\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{(R^2e^{2\pi i t}+1)^3} R\pi i e^{\pi i t}\,dt\right| \le \lim_{R\to\infty}\int_0^1 \frac{R\pi}{(R^2-1)^3}\,dt$$

$$= \int_0^1 \lim_{R\to\infty}\frac{R\pi}{(R^2-1)^3}\,dt = \int_0^1 0\,dt = \underline{\underline{0}}$$

Residuen: $z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z_1 = i \quad z_2 = -i$

uns interessiert nur z_1 mit Imag. $> 0 \to$ Pol 3. Ordnung:

$$\mathrm{Res}(f(z)|z_1) = \lim_{z\to z_1}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-z_1)^3 f(z)\right] = \lim_{z\to i}\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left[\cancel{(z-i)^3}\frac{1}{\cancel{(z-i)^3}(z+i)^3}\right]$$

$$= \lim_{z\to i}\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left(-3\frac{1}{(z+i)^4}\right) = \lim_{z\to i}\frac{1}{2}\cdot 12\frac{1}{(z+i)^5} = 6\frac{1}{(2i)^5}$$

$$= \frac{6}{32 i} = -\frac{3}{16} i$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx = 2\pi i \left(-\frac{3}{16} i\right) = \frac{3\pi}{8}$$

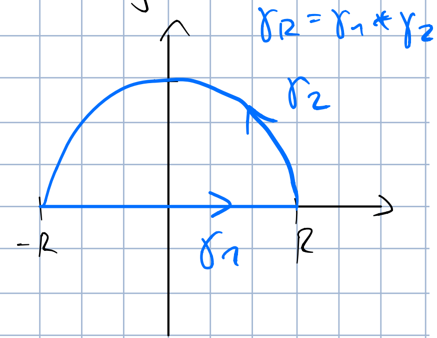
(13.1e) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Bilden komplexe Fkt

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+z+1)^2}$$

Wollen Residuensatz anwenden über folgenden Weg mit $R \to \infty$:



Laut Residuensatz gilt:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_i)>0} \mathrm{Res}(f(z)|z_i)$$

mit $\gamma_1(t) = -R + 2Rt$, $t \in [0,1]$, $\gamma_2(t) = Re^{\pi i t}$, $t \in [0,1]$

Wir zeigen $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$, sodass dann gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{1}{(z^2+z+1)^2}\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_i)>0} \mathrm{Res}(f(z)|z_i)$$

$$\left|\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| = \left|\lim_{R\to\infty} \int_0^1 \frac{1 \cdot R\pi i e^{\pi i t}}{(R^2 e^{2\pi i t} + Re^{2\pi i t} + 1)^2}\,dt\right| \le \lim_{R\to\infty} \int_0^1 \frac{R\pi}{(R^2-R-1)^2}\,dt$$

mit $|z| = R$, $|(z^2+z+1)^2| = (|z^2| - |z| - 1)^2$ $\quad = \int_0^1 \lim\limits_{R\to\infty} \frac{R\pi}{(R^2-R-1)^2}\,dt = \int_0^1 0\,dt = 0$

Residuen: $z^2+z+1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$

Davon interessiert uns nur $z_1 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ da $\mathrm{Im} > 0$, Pol 2. Ordn:

$$\mathrm{Res}(f(z)|z_1) = \lim_{z\to z_1} \frac{d}{dz}\left[(z-z_1)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to z_1} \frac{d}{dz}\left(\cancel{(z-z_1)^2} \frac{1}{\cancel{(z-z_1)^2}(z-z_2)^2}\right)$$

$$= \lim_{z\to z_1} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z-z_2)^2} = \lim_{z\to z_1} -\frac{2}{(z-z_2)^3} = -\frac{2}{(z_1-z_2)^3} = -\frac{2}{(\sqrt{3} i)^3} = \frac{2}{\sqrt{3}^3 i} = -\frac{2}{3\sqrt{3}} i$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+x+1)^2}\, dx = 2\pi i \left(-\frac{2\sqrt{3}}{9} i\right) = \underline{\underline{\frac{4\sqrt{3}\,\pi}{9}}}$$

(13.1f) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

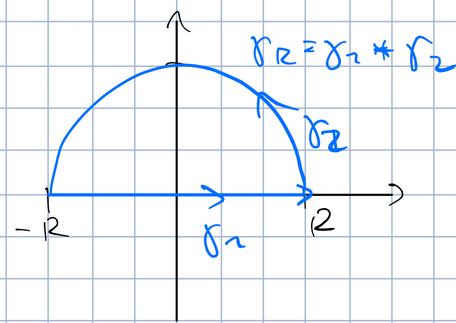
$\Rightarrow$ gerade Fkt $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx$

Bilde eine komplexe Fkt $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}$

Möchte Residuensatz anwenden über folgenden Weg mit

$R \to \infty$: $\gamma_1(t) = -R + 2Rt$, $t \in [0,1]$

$\gamma_2(t) = R e^{\pi i t}$, $t \in [0,1]$



Laut dem Residuensatz gilt:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \underbrace{\int_{\gamma_1} f(z)\,dz}_{\text{mit } \lim\limits_{R\to\infty} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx} + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_i)>0} \operatorname{Res}(f(z)|z_i)$$

Residuen: $z^2+1=0 \Rightarrow z_1 = i,\ z_2 = -i$ $\quad e^{iz}$ keine Polstelle

Nur z_1 liegt in der Kurve: Pol 1. Ordn.

$$\operatorname{Res}(f(z)|z_1) = \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{e^{iz_1}}{2z_1} = \frac{e^{-1}}{2i} = \underline{-\frac{1}{2e} i}$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{2e} i\right) - \lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \frac{\pi}{e} - \underbrace{\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz}_{(*)}$$

Zeigen $(*) = 0$:

$$\left|\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| = \left|\lim_{R\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{iRe^{\pi i t}}\, R\pi i e^{\pi i t}}{R^2 e^{2\pi i t} + 1}\,dt\right|$$

$$= \lim_{R\to\infty}\int_0^1 \left|\frac{e^{iR\cos(\pi t)}\, e^{-R\sin(\pi t)}\, R\pi i e^{\pi i t}}{R^2 e^{2\pi i t} + 1}\right| dt \le \lim_{R\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{\overbrace{-R\sin(\pi t)}^{>0 \text{ für } t\in[0,1]}}\, R\pi}{R^2-1}\,dt$$

$$\le \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \frac{R\pi}{R^2-1}\,dt = \int_0^1 0\,dt = \underline{\underline{0}}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+1} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\, dz\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\pi}{e}\right) = \frac{\pi}{2e}$$

(13.1g) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x,$$

indem Sie die trigonometrische Formel $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ benutzen.

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos(2x)}{1+x^2}\,dx$$

beides gerade Fkt

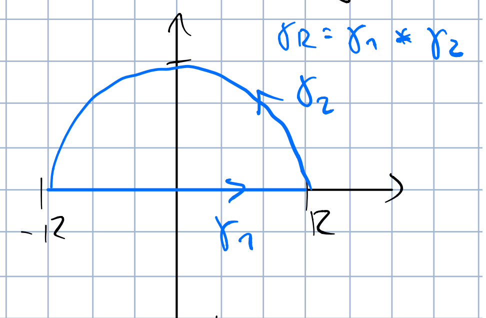
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx - \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{1+x^2}\,dx$$

Bilde komplexe Fkt: $f(z) = \frac{1}{1+z^2} - \frac{e^{2iz}}{1+z^2}$

Möchte Residuensatz anwenden über folgenden Weg:

$\gamma_1(t) = -R + 2Rt, \quad t \in [0,1]$

$\gamma_2(t) = Re^{\pi i t}, \quad t \in [0,1]$



Laut Residuensatz gilt:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_i)>0} \mathrm{Res}(f(z)|z_i)$$

Residuen: e^{2iz} keine Polstelle, $z^2 = -1 \Rightarrow z_1 = i$, $z_2 = -i$

uns interessiert nur z_1, da $\mathrm{Im} > 0$, Pol 1. Ordn.:

$$\mathrm{Res}(f(z)|z_1) = \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{1}{2z_1} - \frac{e^{2iz_1}}{2z_1} = \frac{1}{2i} - \frac{e^{-2}}{2i} = -\frac{1}{2}i + \frac{1}{2e^2}i$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{2}i + \frac{1}{2e}i\right) - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \pi - \frac{\pi}{e^2} - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

Z.z.: $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$

$$\left|\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| = \left|\lim_{R\to\infty}\int_0^1 \frac{\left(1-e^{iRe^{\pi i t}}\right)R\pi i e^{\pi i t}}{\underbrace{R^2 e^{2\pi i t}+1}_{>0 \text{ für } t\in[0,1]}}\,dt\right|$$

$$\le \lim_{R\to\infty}\int_0^1 \left|\frac{R\pi i e^{i\pi t} - R\pi i e^{\pi i t} e^{iR\cos(\pi t)} e^{-R\sin(\pi t)}}{R^2 e^{2\pi i t}+1}\right|$$

$$\le \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \frac{R\pi + R\pi e^{-R\sin(\pi t)}}{R^2-1}\, dt = \int_0^1 0\, dt = \underline{\underline{0}}$$

$$e^{R\sin(\pi t)} >> R$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \pi - \frac{\pi}{e^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{4}\,\mathrm{Re}\left(\pi - \frac{\pi}{e^2}\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4e^2}}}$$

(13.1h) Sei $k > 0$ und $s > 0$. Berechnen Sie das Integral

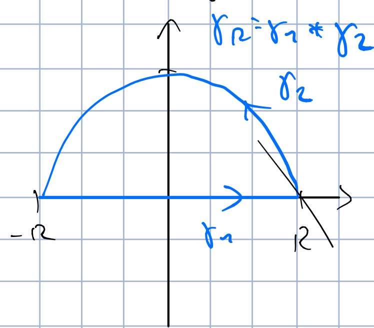
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sx}{k^2 + x^2}\, dx.$$

Bilden eine kompl. Fkt $f(z) = \dfrac{e^{isz}}{k^2+z^2}$

Wollen den Residuensatz anwenden über folgenden Weg:

$\gamma_1(t) = -R + 2Rt \;,\; t \in [0,1]$

$\gamma_2(t) = R e^{i\pi t} \;,\; t \in [0,1]$



Laut Residuensatz gilt:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_i)>0} \mathrm{Res}(f(z)|z_i)$$

Residuen: e^{isz} keine Polstellen, $z^2 = -k^2$ $\quad z_1 = ik \;,\; z_2 = -ik$

uns interessiert nur z_1, da $\mathrm{Im} > 0$, Pol 1. Ordn.:

$$\mathrm{Res}(f(z)|z_1) = \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{e^{isz_1}}{2z_1} = \frac{e^{-sk}}{2ik} = \underline{-\frac{1}{2e^{sk}k}\, i}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 2\pi i\left(-\frac{1}{2e^{sk}k}\, i\right) - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \frac{\pi}{ke^{sk}} - \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$$

z.z. $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$

$$\left| \lim_{R\to\infty} \int_0^1 \frac{e^{Rise^{i\pi t}}\, R\pi i e^{\pi i t}}{k^2 + R^2 e^{2\pi i t}}\, dt \right| \le \lim_{R\to\infty} \int_0^1 \left| \frac{R\pi i e^{\pi i t}\, e^{iRs\cos(\pi t)}\, e^{-R\overset{>0}{s}\overbrace{\sin(\pi t)}^{>0 \text{ für } t\in[0,1]}}}{k^2 + R^2 e^{2\pi i t}} \right| dt$$

$$\le \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \frac{R\pi}{R^2-k^2}\, dt = \int_0^1 0\, dt = \underline{\underline{0}}$$

$$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \frac{\pi}{k e^{sk}}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(sx)}{k^2+x^2}\,dx = \mathrm{Re}\left(\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{ke^{sk}}}}$$ ✓

(13.1i) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta.$$

$$\cos\theta := \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{e^{3i\theta}+e^{-3i\theta}}{2\left(5-2\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right)}\,d\theta = \left\{ \begin{array}{l} z = e^{i\theta} \\ dz = i\underbrace{e^{i\theta}}_{z}\,d\theta \end{array} \right\}$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{z^3+z^{-3}}{2\left(5-2\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)}\,\frac{1}{iz}\,dz = \int_{|z|=1} \frac{i\left(z^2+z^{-4}\right)}{4\left(z+z^{-1}\right)-10}\,dz$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{i\left(z^6+1\right)}{4\left(z^5+z^3\right)-10z^4}\,dz = \int_{|z|=1} \frac{i\left(z^6+1\right)}{z^3\left(4z^2-10z+4\right)}\,dz$$

$\rightsquigarrow$ Residuensatz

$$\int_{|z|=1} (-\,\text{"}\,-)\,dz = 2\pi i \sum_{|z_i|<1} \mathrm{Res}\left(f(z)\,|\,z_i\right)$$

Residuen: $z_1 = 0$ Pol 3. Ord.

$$4z^2-10z+4 = 0 \Rightarrow z_{2,3} = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{8} = \begin{cases} + & 2 \\ - & \frac{1}{2} \end{cases}$$

nicht in $|z|=1$ ↓

Pole 1. Ordn.

Nichts hebbar, da NS von $z^6=-1$ alle $|\cdot|=1$ haben.

$$\mathrm{Res}\left(f(z)\,|\,z_1\right) = \lim_{z\to z_1} \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left[(z-z_1)^3 f(z)\right]$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left[\cancel{z^3}\,\frac{i\left(z^6+1\right)}{\cancel{z^3}\left(4z^2-10z+4\right)}\right]$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left[\frac{6iz^5\left(4z^2-10z+4\right) - i\left(z^6+1\right)\left(8z-10\right)}{\left(4z^2-10z+4\right)^2}\right]$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{1}{2} \left[\frac{\left(30 i z^4 (\cancel{4z^2 - 10z+4}) + 6iz^5(\cancel{8z-10}) - \left(6iz^5(\cancel{8z-10}) + i(z^6+1)\,8\right)\right)(\cancel{4z^2-10z+4})^2}{(\cancel{4z^2-10z+4})^4} - \frac{\left(6iz^5(\cancel{4z^2-10z+4}) - i(z^6+1)(\cancel{8}z-10)\right) 2 (4\cancel{z}^2 - 10\cancel{z}+4)(\cancel{8z}-10)}{} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-8i\cdot 16 + 800i}{256}\right) = \frac{(800-128)i}{512} = \frac{672}{512} i = \frac{336}{256} i = \frac{168}{128} i$$

$$= \frac{84}{64} i = \frac{42}{32} i = \underline{\frac{21}{16} i}$$

$$\operatorname{Res}(f(z)|z_3) = \frac{p(z_3)}{q'(z_3)} = \frac{i(z_3^6+1)}{3z_3^2(4z_3^2 - 10z_3+4) + z_3^3(8z_3-10)}$$

$$= \frac{i\left(\frac{1}{64}+1\right)}{\cancel{\frac{3}{4}(1-5+4)} + \frac{1}{8}(4-10)}$$

$$= \frac{i(1+64)}{8(-6)} = \frac{i+64i}{-48} = -\frac{i}{48} - \frac{4}{3} i$$

$$= \frac{-i-64i}{48} = \underline{-\frac{65 i}{48}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{\cos 3\theta}{5-4\cos\theta}\, d\theta = 2\pi i \left(\frac{21}{16} i - \frac{65}{48} i\right) = 2\pi i \left(\frac{(63-65)i}{48}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{24} = \underline{\underline{\frac{\pi}{12}}}$$

(13.1j) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a\cos\theta + a^2}\, d\theta, \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

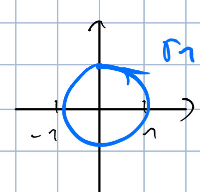
für:

i. $|a| < 1$, ii. $|a| > 1$.

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a\cos\theta + a^2} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - ae^{i\theta} - ae^{-i\theta} + a^2} d\theta = \left\{ \begin{array}{l} e^{i\theta} = z \\ dz = i\underbrace{e^{i\theta}}_{z} d\theta \end{array} \right\} = \int_{|z|=1} \frac{1}{(1 - az - \frac{a}{z} + a^2) iz} dz$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{i}{az^2 - (a^2+1)z + a} dz$$

$\Rightarrow$ Residuensatz über γ_1



Residuen: $a z^2 - (a^2+1) z + a = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \dfrac{a^2+1 \pm \sqrt{(a^2+1)^2 - 4a^2}}{2a}$

$$= \frac{a^2+1 \pm \sqrt{a^4 - 2a^2+1}}{2a}$$

$$= \frac{a^2+1 \pm \sqrt{(a^2-1)^2}}{2a} = \frac{a^2+1 \pm (a^2-1)}{2a}$$

$$\Rightarrow z_1 = \underline{a} \qquad z_2 = \underline{\frac{1}{a}}$$

i) $|a|<1 \Rightarrow z_1$ im Bereich: Pol 1. Ordn.

$$\mathrm{Res}(f(z)|z_1) = \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{i}{2z_1 a - (a^2+1)} = \frac{i}{2a^2 - a^2 - 1} = \underline{\frac{i}{a^2-1}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a\cos\theta + a^2} \, d\theta \Big|_{|a|<1} = 2\pi i \left(\frac{i}{a^2-1} \right) = \underline{\underline{\frac{2\pi}{1-a^2}}}$$

ii) $|a|>1 \Rightarrow z_2$ im Bereich: Pol 1. Ordn.

$$\mathrm{Res}(f(z)|z_2) = \frac{p(z_2)}{q'(z_2)} = \frac{i}{2z_2 a - (a^2+1)} = \frac{i}{2 - a^2 - 1} = \underline{\frac{i}{1-a^2}}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a\cos\theta + a^2} \, d\theta \Big|_{|a|>1} = 2\pi i \left(\frac{i}{1-a^2} \right) = \underline{\underline{\frac{2\pi}{a^2-1}}}$$

(13.1k) Sei $0 < a < 1$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} \, dx,$$

indem sie über den Weg γ in Abbildung 13.1 integrieren.

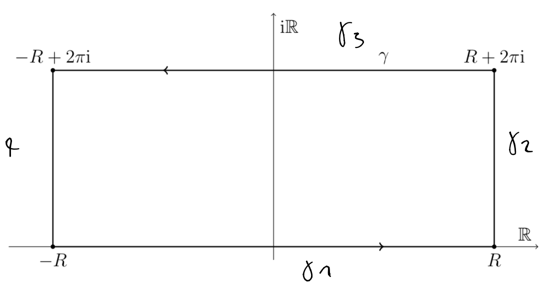


Abbildung 13.1: Der Weg zur Verwendung in Aufgabe (13.1k).

Bilden kompl. Fkt: $f(z) = \dfrac{e^{\alpha z}}{1+e^z}$

Wollen Residuensatz anwenden über den vorgegebenen Weg.

Laut dem Satz gilt:

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz + \int_{\gamma_4} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_i \in \gamma_R} \mathrm{Res}(f(z)|z_i)$$

Residuen: $e^z = -1$ für kompl. z gilt

$$\cos(z) + i\sin(z) = -1 \Rightarrow z_k = \pi i + 2k\pi i$$

davon interessiert uns nur z_0, alle anderen sind ausserhalb des Bereiches. -> Pol 1. Ordn.

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f(z)|z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} = \frac{e^{\alpha z_0}}{e^{z_0}} = \frac{e^{\alpha\pi i}}{-1} = \underline{-e^{\alpha\pi i}}$$

Z.z.: Was der Wert von $\int_{\gamma_2}$, $\int_{\gamma_3}$ & $\int_{\gamma_4}$ ist:

$$\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_R^{R+2\pi i} \frac{e^{\alpha z}}{1+e^z}\,dz = \begin{Bmatrix} z = R + 2\pi i t \\ dz = 2\pi i\,dt \end{Bmatrix} = \int_0^1 \frac{e^{\alpha R + \alpha 2\pi i t}}{1+e^{R+2\pi i t}}\, 2\pi i\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{\alpha R} e^{\alpha 2\pi i t}}{1+e^R e^{2\pi i t}}\, 2\pi i\,dt$$ man merkt, dass es wohl nach 0 strebt

$$\Rightarrow \left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \leq \lim_{R\to\infty} \int_0^1 \frac{2e^{\frac{\alpha R}{\pi}}}{e^R - 1}\,dt = \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \frac{\cancel{2e^{\frac{\overbrace{R(\alpha-1)}^{<0}}{\pi}}}\to 0}{1 - \cancel{\frac{1}{e^R}}\to 0}\,dt = \int_0^1 0\,dt = \underline{0}$$

Wir vermuten dasselbe für γ_4:

$$\left|\int_{\gamma_4} f(z)\,dz\right| = \left|\lim_{R\to\infty} \int_{-R+2\pi i}^{-R} \frac{e^{\alpha z}}{1+e^z}\,dz\right| = \left|-\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{-R+2\pi i} \frac{e^{\alpha z}}{1+e^z}\,dz\right| = \begin{Bmatrix} z = -R + 2\pi i t \\ dz = 2\pi i\,dt \end{Bmatrix}$$

$$= \left|\lim_{R\to\infty} \int_0^1 \frac{e^{-\alpha R} e^{\alpha 2\pi i t}}{1+e^{-R} e^{2\pi i t}}\, 2\pi i\,dt\right| \leq \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \frac{\cancel{e^{-\alpha R}}\to 0}{\cancel{e^{-R}}\to 0 - 1} = \int_0^1 \frac{0}{-1}\,dt = \underline{0}$$

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = \int_{R+2\pi i}^{-R+2\pi i} \frac{e^{\alpha z}}{1+e^z}\,dz = -\int_{-R+2\pi i}^{R+2\pi i} \frac{e^{\alpha z}}{1+e^z}\,dz = \begin{Bmatrix} z = t + 2\pi i \\ dz = dt \end{Bmatrix}$$

$$= -\int_{-R}^{R} \frac{e^{\alpha t} e^{\alpha 2\pi i}}{1+e^t \underbrace{e^{2\pi i}}_{1}}\,dt = -e^{\alpha 2\pi i} \int_{-R}^{R} \frac{e^{\alpha t}}{1+e^t}\,dt = \underline{-e^{\alpha 2\pi i} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + 0 + \left(-e^{\alpha 2\pi i} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz\right) + 0 = 2\pi i\left(-e^{\alpha\pi i}\right)$$

mit $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^{x}}\,dx$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1+e^{x}}\,dx = \frac{-2\pi i\, e^{\alpha\pi i}}{1-e^{\alpha 2\pi i}} = \frac{-2\pi i}{e^{-\alpha\pi i}-e^{\alpha\pi i}} = \frac{\pi}{\frac{e^{\alpha\pi i}-e^{-\alpha\pi i}}{2i}} = \underline{\underline{\frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}}} \checkmark$$

(13.1l) Sei $-1 < a < 1$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh x}\,dx,$$

indem sie über den Weg γ in Abbildung 13.2 integrieren.

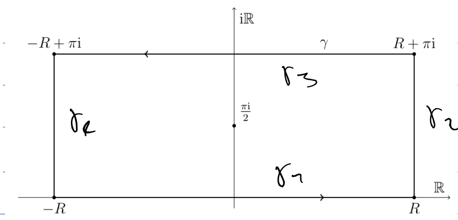


Abbildung 13.2: Der Weg zur Verwendung in Aufgabe (13.1l).

Bilden kompl. Fkt: $f(z) = \frac{2e^{\alpha z}}{e^{z}+e^{-z}}$. Wollen den Residuensatz über den gegebenen Weg $\gamma_R = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3 * \gamma_4$. Laut Satz gilt:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz + \int_{\gamma_4} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{z_i\in\gamma_R} \mathrm{Res}(f(z)|z_i)$$

Residuen: $e^{\alpha x}$ keine Polstelle, $e^{z}+e^{-z}=0$, mit kompl. z finden wir

$$\cos(z) + i\sin(z) + \cos(z) - i\sin(z) = 0$$

$$2\cos(z) = 0 \Rightarrow z_k = \frac{\pi i}{2} + k\pi i$$

→ Uns interessiert nur z_0, alle anderen ausserhalb des Bereiches.

↳ Pol 1. Ordn.

$$\mathrm{Res}(f(z)|z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} = \frac{2e^{\alpha z_0}}{e^{z_0}-e^{-z_0}} = \frac{2e^{\frac{\alpha\pi i}{2}}}{e^{\frac{\pi i}{2}}-e^{-\frac{\pi i}{2}}} = \frac{2e^{\frac{\alpha\pi i}{2}}}{2i} = \underline{-ie^{\frac{\alpha\pi i}{2}}}$$

Z.z: Wert von $\int_{\gamma_2}$, $\int_{\gamma_3}$ & $\int_{\gamma_4}$:

$$\left|\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| = \left|\lim_{R\to\infty}\int_{R}^{R+\pi i} \frac{2e^{\alpha z}}{e^{z}+e^{-z}}\,dz\right| = \left\{\begin{matrix} z = R + t\pi i \\ dz = \pi i\,dt \end{matrix}\right\}$$

$$= \left|\lim_{R\to\infty}\int_0^1 \frac{2e^{\alpha R}e^{\alpha t\pi i}\pi i}{e^{R}e^{t\pi i}+e^{-R}e^{-t\pi i}}\,dt\right| \le \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \frac{2\pi i\, e^{\alpha R}e^{R}}{e^{2R}-1}\,dt = \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \frac{2\pi i\, \cancel{e}^{\overbrace{(\alpha+1-2)}^{<0}R} \to 0}{1-\frac{1}{e^{2R}}\to 0}$$

$$= \int_0^1 \frac{0}{1}\,dt = \underline{0}$$

$$\left|\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_4} f(z)\,dz\right| = \left|-\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{-R+\pi i}\frac{2e^{\alpha z}}{e^{z}+e^{-z}}\,dz\right| = \left\{\begin{array}{l} z=-R+t\pi i \\ dz=\pi i\,dt\end{array}\right\}$$

$$=\left|\lim_{R\to\infty}\int_0^1\frac{2e^{-\alpha R}e^{\alpha\pi i t}\pi i}{e^{-R}e^{t\pi i}+e^{R}e^{-t\pi i}}\,dt\right| \le \int_0^1\lim_{R\to\infty}\frac{2\pi\,\cancel{e^{\overbrace{(-\alpha-1)}^{<0}R}}^{\;(-\alpha-1)R\to 0}}{\cancel{e^{-2R}}_{0}-1}\,dt = \int_0^1\frac{0}{-1}\,dt = \underline{0}$$

$$\int_{\gamma_3} f(z)\,dz = -\int_{-R+\pi i}^{R+\pi i}\frac{2e^{\alpha z}}{e^{z}+e^{-z}}\,dz = \left\{\begin{array}{l} z=t+\pi i \\ dz=dt\end{array}\right\} = -\int_{-R}^{R}\frac{2e^{\alpha t}e^{\alpha\pi i}}{e^{t}e^{\pi i}+e^{-t}e^{-\pi i}}\,dt$$

$$=-\int_{-R}^{R}\frac{2e^{\alpha t}e^{\alpha\pi i+\pi i}}{e^{t}\underbrace{e^{2\pi i}}_{1}+e^{-t}}\,dt = \underline{-e^{\pi i(\alpha+1)}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + 0 - e^{\pi i(\alpha+1)}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + 0 = 2\pi i\left(-ie^{\frac{\alpha\pi i}{2}}\right)$$

mit $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha x}}{\cosh(x)}\,dx$ folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha x}}{\cosh(x)}\,dx = \frac{2\pi e^{\frac{\alpha\pi i}{2}}}{1-e^{\pi i(\alpha+1)}} = \frac{2\pi e^{-\frac{\pi i}{2}}}{e^{-\frac{\pi i(\alpha+1)}{2}}-e^{\frac{\pi i(\alpha+1)}{2}}} = \frac{2i\pi}{e^{i\frac{\pi(\alpha+1)}{2}}-e^{-i\frac{\pi(\alpha+1)}{2}}}$$

$$=\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi(\alpha+1)}{2}\right)} = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\pi}{\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}$$ ✓

(13.1m) Betrachten Sie ausserdem die folgenden Aufgaben der alten Serien:

i. Aufgabe 6.5,

ii. Aufgaben 7.3a und 7.3b,

iii. Aufgabe 7.4,

iv. Aufgabe 7.5a.

$\gamma_2(t) = Re^{\pi i t},\ t\in[0,1]$

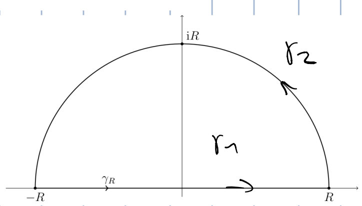
i)

Aufgabe 6.5 Ein reelles Integral

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

Hinweis: Wenden Sie den Residuensatz auf den Weg $\gamma_R : [0,1] \to \mathbb{C}$, welcher in Abbildung 6.1 gezeichnet ist, an. Dann lassen Sie R gegen unendlich gehen.



Bilde komplexe Fkt: $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ und wende Residuensatz über den gegebenen Weg $\gamma_R = \gamma_1 * \gamma_2$ an. Laut Satz gilt:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_i)>0}\operatorname{Res}(f(z)|z_i)$$

Residuen: $1+z^2=0 \Rightarrow z_1 = i \quad z_2 = -i$

Uns interessiert nur z_1 mit $\mathrm{Im}>0$, Pol 2. Ordnung:

$$\mathrm{Res}(f(z)|z_1) = \lim_{z\to z_1} \frac{d}{dz}\left[(z-z_1)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\cancel{(z-i)^2}\frac{1}{\cancel{(z-i)^2}(z+i)^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{-2}{(z+i)^3} = \frac{-2}{(2i)^3} = \frac{2}{8i} = \underline{-\frac{1}{4}i}$$

Z.z.: $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$

$$\left|\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| = \left|\lim_{R\to\infty}\int_0^1 \frac{1\, R\pi i e^{\pi i t}}{(1+R^2 e^{2\pi i t})^2}\, dt\right| \le \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \frac{R\pi}{(R^2-1)^2}\, dt$$

$$= \int_0^1 0\, dt = \underline{\underline{0}}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + 0 = 2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{4} i\right) = \frac{\pi}{2}$$

mit $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ folgt direkt

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

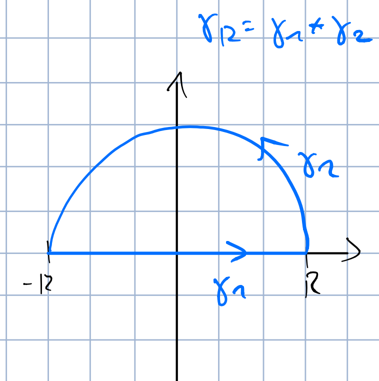
ii) **(7.3a)** Seien $a, b > 0$. Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

i) $\int_0^\infty \frac{z^2}{z^6+1}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{6}$,

ii) $\int_0^\infty \frac{1}{z^4+1}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$,

iii) $\int_0^\infty \frac{\cos(az)}{(z^2+b^2)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{4b^3}(1+ab)\mathrm{e}^{-ab}$,

iv) $\int_0^\infty \frac{z^2}{(z^2+a)^3}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{16a\sqrt{a}}$.



i) gerade Fkt $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{z^6+1}\,dz = 2\int_0^{\infty}\frac{z^2}{z^6+1}\,dz$

Werden Residuensatz über folgende Weg an:

$\gamma_1(t) = -R+2Rt$, $t\in[0,1]$, $\gamma_2(t) = Re^{\pi i t}$, $t\in[0,1]$

Laut R. Satz folgt:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_i)>0} \mathrm{Res}(f(z)|z_i)$$

Residuen: $z^6+1=0 \Rightarrow z^6 = e^{\pi i} \Rightarrow z_1 = e^{\frac{\pi i}{6}}$, $z_2 = e^{\frac{3\pi i}{6}}$, $z_3 = e^{\frac{5\pi i}{6}}$,

$z_4 = e^{\frac{7\pi i}{6}}$, $z_5 = e^{\frac{9\pi i}{6}}$, $z_6 = e^{\frac{11\pi i}{6}}$

Uns interessieren dabei nur z_1, z_2, z_3 mit $\mathrm{Im}>0$, Pole 1. Ordn.

$$\mathrm{Res}(f(z)|z_1) = \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{z_1^2}{6 z_1^5} = \frac{e^{\frac{2\pi i}{6}}}{6 e^{\frac{5\pi i}{6}}} = \frac{e^{-\frac{3\pi i}{6}}}{6} = \underline{-\frac{i}{6}}$$

$$\mathrm{Res}(f(z)|z_2) = \frac{e^{\frac{6\pi i}{6}}}{6 e^{\frac{15\pi i}{6}}} = \underline{\frac{i}{6}} \qquad \mathrm{Res}(f(z)|z_3) = \frac{e^{\frac{10\pi i}{6}}}{6 e^{\frac{25\pi i}{6}}} = \underline{-\frac{i}{6}}$$

Z.z: $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$

$$\left|\lim_{R\to\infty} \int_0^1 \frac{R^2 e^{2\pi i t}\, R\pi i e^{\pi i t}}{R^6 e^{6\pi i t}+1}\,dt\right| \le \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \frac{R^3 \pi}{R^6-1}\,dt = \int_0^1 0\,dt = \underline{0}$$

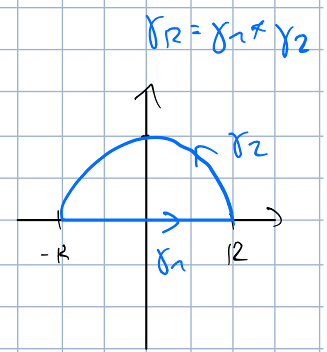
$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + 0 = 2\pi i\left(-\frac{i}{6} + \frac{i}{6} - \frac{i}{6}\right) = \underline{\frac{\pi}{3}}$$

mit $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^2}{z^6+1}\,dz$ folgt direkt

$$\int_0^\infty \frac{z^2}{z^6+1}\,dz = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{3} = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}$$

ii) ii) $\int_0^\infty \frac{1}{z^4+1}\,dz = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$, $\Rightarrow$ gerade Fkt $f(-z) = f(z)$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^4+1}\,dz = 2\int_0^\infty \frac{1}{z^4+1}\,dz$$



Werden Residuensatz an über folgenden Weg:

$\gamma_1(t) = -R + 2Rt$, $t \in [0,1]$, $\gamma_2(t) = Re^{\pi i t}$, $t \in [0,1]$

Laut R.Satz gilt:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_i)>0} \mathrm{Res}(f(z)|z_i)$$

Residuen: $z^4 = e^{\pi i} \Rightarrow z_1 = e^{\frac{\pi i}{4}}$, $z_2 = e^{\frac{3\pi i}{4}}$, $z_3 = e^{\frac{5\pi i}{4}}$, $z_4 = e^{\frac{7\pi i}{4}}$

Uns interessiert nur z_1 & z_2, da $\mathrm{Im}>0$, Pole 1. Ordn.:

$$\operatorname{Res}(f(z)|z_1) = \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{1}{4z_1^3} = \frac{1}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}} = \frac{e^{-\frac{3\pi i}{4}}}{4} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i}{4} = \underline{-\frac{\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}i}$$

$$\operatorname{Res}(f(z)|z_2) = \frac{1}{4z_2^3} = \frac{1}{4e^{\frac{9\pi i}{4}}} = \frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{4} = \underline{\frac{\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{8}i}$$

Z.z.: $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$

$$\left|\lim_{R\to\infty}\int_0^1 \frac{1\,R\pi i e^{\pi i t}}{R^4 e^{4\pi i t}+1}\,dt\right| \leq \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \frac{R\pi}{R^4-1}\,dt = \int_0^1 0\,dt = \underline{\underline{0}}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + 0 = 2\pi i\left(\cancel{-\frac{\sqrt{2}}{8}}\;\cancel{+\frac{\sqrt{2}}{8}} - \frac{\sqrt{2}}{8}i - \frac{\sqrt{2}}{8}i\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

und mit $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^4+1}\,dx$ folgt direkt

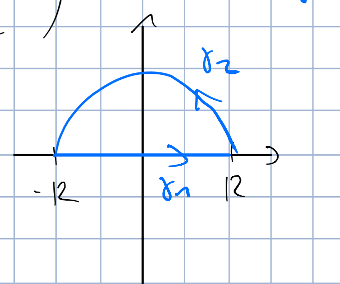
$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\right) = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}\pi}{4}}} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}} \checkmark$$

iii) $\int_0^\infty \frac{\cos(az)}{(z^2+b^2)^2}\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{4b^3}(1+ab)\mathrm{e}^{-ab}$,
$a,b>0$

$\Rightarrow$ gerade Fkt $\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(az)}{(z^2+b^2)^2}\,dz = 2\int_0^\infty \frac{\cos(az)}{(z^2+b^2)^2}\,dz$

Des Weiteren gilt $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(az)}{(z^2+b^2)^2}\,dz = \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{e^{iaz}}{(z^2+b^2)^2}}_{f(z)}\,dz\right)$

$\gamma_R = \gamma_1 + \gamma_2$



Wenden Residuensatz auf folgenden Weg an

mit $\gamma_1(t) = -R+2Rt$, $t\in[0,1]$, $\gamma_2(t) = Re^{\pi i t}$, $t\in[0,1]$

Laut R.Satz gilt für das Integral:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_i)>0}\operatorname{Res}(f(z)|z_i)$$

Residuen: $z^2 = -b^2$, $z_1 = ib$, $z_2 = -ib$ uns interessiert nur z_1, da

$\operatorname{Im}>0 \to$ Pol 2. Ordn.

$$\operatorname{Res}(f(z)|z_1) = \lim_{z\to z_1}\frac{d}{dz}\left[(z-z_1)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to ib}\frac{d}{dz}\left[\cancel{(z-ib)^2}\frac{e^{iaz}}{\cancel{(z-ib)^2}(z+ib)^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to ib} \frac{\alpha i e^{i\alpha z}(z+ib)^2 - e^{i\alpha z}\,2(z+ib)}{(z+ib)^4} = \frac{\alpha i e^{i\alpha i b}(2ib)^2 - e^{i\alpha i b}\,2\cancel{(2ib)}}{(2ib)^{\cancel{4}3}}$$

$$= \frac{-2ab e^{-ab} - 2e^{-ab}}{-8ib^3} = \frac{-\cancel{2}e^{-ab}\,i(ab+1)}{4\cancel{8}b^3} = \underline{\frac{-e^{-ab}\,i(ab+1)}{4b^3}}$$

Z.z.: $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$

$$\left|\lim_{R\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{iaRe^{i\pi t}}\,R\pi i e^{\pi i t}}{(R^2e^{2\pi i t}+b^2)^2}\,dt\right| \le \int_0^1 \lim_{R\to\infty}\left|\frac{e^{Riacos(\pi t)}\,e^{-R\overset{>0}{a}\overbrace{\sin(\pi t)}^{>0 \text{ für } t\in[0,1]}}\,R\pi i e^{\pi i t}}{(R^2e^{2\pi i t}+b^2)^2}\right|$$

$$\le \int_0^1 \lim_{R\to\infty}\frac{R\pi}{(R^2-b^2)^2}\,dt = \int_0^1 0\,dt = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + 0 = 2\pi i\left(\frac{-e^{-ab}\,i(ab+1)}{4b^3}\right) = \frac{\pi e^{-ab}(ab+1)}{2b^3}$$

mit $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iaz}}{(z^2+b^2)^2}\,dz$ folgt direkt

$$\Rightarrow \int_0^\infty \frac{\cos(az)}{(z^2+b^2)^2}\,dz = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iaz}}{(z^2+b^2)^2}\,dz\right) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{\pi e^{-ab}(ab+1)}{2b^3}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi e^{-ab}(ab+1)}{4b^3}}}$$ ✓

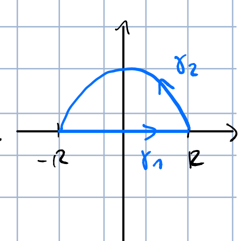
iv) $\int_0^\infty \frac{z^2}{(z^2+a)^3}\,dz = \frac{\pi}{16a\sqrt{a}}$.

$a>0$

$\Rightarrow$ gerade Fkt $f(-z)=f(z)$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{z^2}{(z^2+a)^3}\,dz = 2\int_0^\infty \frac{z^2}{(z^2+a)^3}\,dz$$

$\gamma_R = \gamma_1 * \gamma_2$



Wir wenden den Residuensatz über folgenden Weg an:

Mit $\gamma_1(t) = -R+2Rt,\ t\in[0,1],\ \gamma_2(t) = Re^{\pi i t},\ t\in[0,1]$

Nach Res. Satz gilt:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_i)>0} \mathrm{Res}(f(z)|z_i)$$

Residuen: $z^2 = -a$, $a>0$ $\qquad z_1 = i\sqrt{a}$, $z_2 = -i\sqrt{a}$

Uns interessiert nur z_1 mit $\mathrm{Im}>0$, Pol 3. Ordnung:

$$\mathrm{Res}(f(z)|z_1) = \lim_{z\to z_1} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2}\left[(z-z_1)^3 f(z)\right]$$

$$= \lim_{z\to i\sqrt{a}} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\left[\cancel{(z-i\sqrt{a})^3}\frac{z^2}{\cancel{(z-i\sqrt{a})^3}(z+i\sqrt{a})^3}\right]$$

$$= \lim_{z\to i\sqrt{a}} \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left[\frac{2z(z+i\sqrt{a})^3-3z^2(z+i\sqrt{a})^2}{(z+i\sqrt{a})^6}\right]$$

$$= \lim_{z\to i\sqrt{a}} \frac{1}{2}\left[\frac{(2(z+i\sqrt{a})^3-6z^2(z+i\sqrt{a}))(z+i\sqrt{a})^6-6(z+i\sqrt{a})^5(2z(z+i\sqrt{a})^3-3z^2(z+i\sqrt{a})^2}{(z+i\sqrt{a})^{12}}\right.$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(2(2i\sqrt{a})^3+6a(2i\sqrt{a}))(2i\sqrt{a})^{\cancel{6}}-6(\cancel{2i\sqrt{a}})^5(2i\sqrt{a}(2i\sqrt{a})^3+3a(2i\sqrt{a})^2}{(2i\sqrt{a})^{\cancel{12}\,7}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(-16ia\sqrt{a}+12ai\sqrt{a})(2i\sqrt{a})-16(16a^2-12a^2)}{-128ia^3\sqrt{a}}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{8a^2-24a^2}{-128ia^3\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\,\frac{16}{128ia\sqrt{a}} = \underline{\frac{1}{16ia\sqrt{a}}}$$

Z.z: $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$

$$\left|\lim_{R\to\infty}\int_0^1 \frac{R^2e^{2\pi it}\,R\pi i e^{\pi it}}{(R^2e^{2\pi it}+a)^3}\,dt\right| \le \int_0^1 \lim_{R\to\infty}\frac{R^3\pi}{(R^2-a)^3}\,dt = \int_0^1 0\,dt = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + 0 = 2\pi i\left(\frac{1}{16ia\sqrt{a}}\right) = \underline{\frac{\pi}{8a\sqrt{a}}}$$

mit $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}} f(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{z^2}{(z^2+a)^3}\,dz$ folgt direkt:

$$\int_0^\infty \frac{z^2}{(z^2+a)^3}\,dz = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{8a\sqrt{a}} = \underline{\underline{\frac{\pi}{16a\sqrt{a}}}}$$ ✓

(7.3b) [*Bonus*] Benutzen Sie den Residuensatz und den Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, welcher in Abbildung 7.2 gegeben ist, um die Identität

$$\int_0^\infty \frac{1}{z^3+1}\,dz = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

zu zeigen.

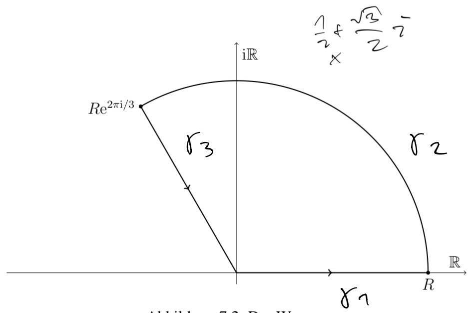


Abbildung 7.2: Der Weg γ_ε.

Wollen über den gegebenen Weg integrieren mit

$\gamma_R = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3$

$\gamma_1(t) = Rt, \; t \in [0,1]$

$\gamma_2(t) = Re^{\frac{2\pi i}{3}t}, \; t \in [0,1]$

$\gamma_3(t) = Re^{\frac{2\pi i}{3}} - tRe^{\frac{2\pi i}{3}}, \; t \in [0,1]$

Wenden Residuensatz auf γ_R an:

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_i \in \gamma_R} Res(f(z)|z_i)$$

Residuen: $z^3 = e^{\pi i} \Rightarrow z_1 = e^{\frac{\pi i}{3}}, \; z_2 = e^{\frac{3\pi i}{3}}, \; z_3 = e^{\frac{5\pi i}{3}}$

Dabei liegt nur z_1 im Bereich, Pol 1. Ordn.

$$Res(f(z)|z_1) = \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{1}{3z_1^2} = \frac{1}{3e^{\frac{2\pi i}{3}}} = \underline{\frac{1}{3}e^{-\frac{2\pi i}{3}}}$$

Z.z.: Welche Wert γ_2 & γ_3 hat:

$$\left|\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| = \left|\lim_{R\to\infty}\int_0^1 \frac{R\frac{2\pi i}{3}e^{\frac{2\pi i}{3}t}}{R^3e^{2\pi i t}+1}dt\right| \le \int_0^1 \lim_{R\to\infty}\frac{2R\pi}{3(R^3-1)}dt$$

$-\gamma_3(t) = te^{\frac{2\pi i}{3}}, \; t \in [0,R]$ $\qquad = \int_0^1 0\,dt = \underline{0}$

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz = -\int_{-\gamma_3} f(z)dz = -\int_0^R \frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{t^3\underbrace{e^{2\pi i}}_{1}+1}dt = -e^{\frac{2\pi i}{3}}\int_{\gamma_1} f(z)dz$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + 0 - e^{\frac{2\pi i}{3}}\int_{\gamma_1} f(z)dz = 2\pi i \frac{1}{3}e^{-\frac{2\pi i}{3}}$$

mit $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_0^\infty \frac{1}{z^3+1}dz$ folgt daraus direkt

$$\int_0^\infty \frac{1}{z^3+1}dz = \frac{\frac{2}{3}\pi i e^{-\frac{2\pi i}{3}}}{1-e^{\frac{2\pi i}{3}}} = \frac{2}{3}\pi i \frac{1}{e^{\frac{2\pi i}{3}}-e^{\frac{4\pi i}{3}}} = \frac{2}{3}\pi i \frac{1}{-\cancel{\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}i+\cancel{\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

iii)

Aufgabe 7.4 Reihenberechnung durch den Residuensatz

(7.4a) Betrachten Sie die Funktion

$$f(z) := \pi\cot(\pi z) = \pi \cdot \frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$$

und zeigen Sie, dass f die einfachen Polstellen $z_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$, hat und dass die Residuen von f an all diesen Polstellen den Wert eins haben.

(7.4b) Ziegen Sie, dass f auf dem Rand ∂Q_N des Quadrates

$$Q_N := [-(N+\tfrac{1}{2}), N+\tfrac{1}{2}] \times \mathrm{i}[-(N+\tfrac{1}{2}), N+\tfrac{1}{2}],$$

mit $N \in \mathbb{N}$, beschränkt ist durch eine obere Schranke, welche nicht von N abhängig ist.

(7.4c) Zeigen Sie, dass

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\partial Q_N} \frac{f(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z = 0$$

gilt und folgern Sie aus dem Residuensatz die Identität

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Hinweis: Die Laurententwicklung des Kotangens um $z_0 = 0$ ist gegeben durch

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \frac{1}{4725}z^7 - \ldots$$

a) $\sin(\pi z) = 0 \Rightarrow z_k = k \in \mathbb{Z}$

$\cos(\pi z)$ ist $\forall z_k \neq 0$

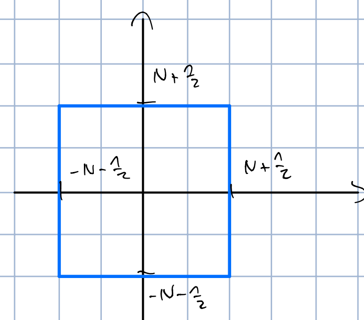
$\Rightarrow$ Pole 1. Ordn.

$$\mathrm{Res}(f(z)|z_k) = \frac{p(z_k)}{q'(z_k)} = \cancel{\pi}\frac{\cancel{\cos(\pi z_k)}}{\cancel{\pi}\,\cancel{\cos(\pi z_k)}} = \underline{\underline{1}}$$

c)

$$g(z) = \frac{f(z)}{z^2} = \frac{\pi\cos(\pi z)}{z^2(\sin(\pi z))}$$

Wir möchten $\lim\limits_{N\to\infty}\int_{\partial Q_N} g(z)$ mit Hilfe des Residuensatzes berechnen über folgende Weg.



$$\left|\lim_{N\to\infty}\int_{\partial Q_N} g(z)\,dz\right| \le \lim_{N\to\infty} 4(N+1)\frac{\mathrm{Max}|f(z)|}{(N+\frac{1}{2})^2}$$

$$\le \lim_{N\to\infty}\frac{4(N+1)2\pi}{N^2+N+\frac{1}{4}} = \underline{0}$$

Wir wissen bereits aus a), dass $f(z)$ Residuen mit Wert 1 $\forall z_k \in \mathbb{Z}$ besitzt, es kommt aber ein Pol 3. Ordn. in $z=0$ dazu:

$$\mathrm{Res}(g(z)|0) = a_{-1}\left(\frac{\pi}{z^2}\left(\frac{1}{\pi z} - \frac{\pi}{3}z - \ldots\right)\right) = a_{-1}\left(\frac{1}{z^3} - \frac{\pi^2}{3z} - \ldots\right) = \underline{-\frac{\pi^2}{3}}$$

$$\mathrm{Res}(g(z)|z_k) = \frac{p(z_k)}{q'(z_k)} = \frac{\cancel{\pi}\,\cancel{\cos(\pi z_k)}}{\underbrace{2z\sin(\pi z_k)}_{0} + z_k^2\cancel{\pi}\,\cancel{\cos(\pi z_k)}} = \frac{1}{z_k^2} = \underline{\frac{1}{k^2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty}\int_{\partial Q_N} g(z)\,dz = 2\pi i\left(-\frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right) = -\frac{2\pi^3 i}{3} + 4\pi i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = 0$$

von $-\infty$ – ∞ ohne 0

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$ ✓

iv)

Aufgabe 7.5 [*Bonus*] Weitere Reihen

(7.5a) Benutzen Sie Aufgabe 7.4, um die folgenden Reihen zu berechnen. Die Konstante a ist dabei so gewählt, dass die Nenner der Brüche in den Summen niemals verschwinden.

i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+a^2}$,

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^2}$,

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$,

iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$.

i) Wir wählen wie in 7.4 $g(z) = \pi \cot(\pi z)$, nun aber $f(z) = \frac{g(z)}{z^2+a^2}$ und berechnen mittels Residuensatz über denselben Weg:

Residuen: $z^2 = -a^2 \Rightarrow z_1 = ia$, $z_2 = -ia$ Pole 1. Ordn.

$$\mathrm{Res}(f(z)|z_1) = \lim_{z \to z_1} (z-z_1) f(z) = \lim_{z \to ia} \cancel{(z-ia)} \frac{\pi \cos(\pi z)}{\cancel{(z-ia)}(z+ia)\sin(\pi z)}$$

$$= \frac{\pi \cos(ia\pi)}{2ia \sin(ia\pi)}$$

$$\mathrm{Res}(f(z)|z_2) = \lim_{z \to -ia} \cancel{(z+ia)} \frac{\pi \cos(\pi z)}{(z-ia)\cancel{(z+ia)}\sin(\pi z)} = \frac{\pi \cos(-ia\pi)}{-2ia \sin(-ia\pi)}$$

$$\mathrm{Res}(f(z)|z_k) = \frac{p(z)}{q'(z)} = \frac{\cancel{\pi \cos(\pi z)}}{(z^2+a^2)\cancel{\pi\cos(\pi z)} + \underbrace{2z\sin(\pi z)}_{0}} = \frac{1}{k^2+a^2}$$

Mit derselben Abschätzung wie oben gilt $\lim_{N\to\infty} \int_{\gamma Q_N} f(z)\,dz = 0$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \int_{\gamma Q_N} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\frac{\pi}{2ia} \coth(a\pi) + \frac{\pi}{2ia} \coth(a\pi) + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+a^2} + \frac{1}{a^2} \right) = 0$$

checke Lsg nicht

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+a^2} = \frac{\pi i}{2a} \coth(a\pi) - \frac{1}{2a^2}$$ (✓)

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^2}$, Wie oben mit $f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{(z+a)^2}$

Residuen: $z_1 = -a$, $z_k = k \in \mathbb{Z}$
Pol 2. Ordn

$$\mathrm{Res}(f(z)|z_1) = \lim_{z \to z_1} \frac{d}{dz} \left[(z-z_1)^2 f(z) \right] = \lim_{z \to -a} \frac{d}{dz} \left[\cancel{(z+a)^2} \frac{\pi \cot(\pi z)}{\cancel{(z+a)^2}} \right]$$

$$= \lim_{z \to -a} \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi z)} = \underline{\frac{-\pi^2}{\sin^2(\pi a)}}$$

$$\mathrm{Res}(f(z)|z_k) = \frac{p(z_k)}{q'(z_k)} = \frac{\cancel{\pi} \cancel{\cos(\pi k)}}{(k+a)^2 \cancel{\pi} \cancel{\cos(\pi k)} + \underbrace{2k \sin(\pi k)}_{0}} = \frac{1}{(k+a)^2}$$

Selbe Abschätzung wie oben $\to \lim_{N \to \infty} \int_{\partial Q_N} f(z) dz = \underline{0}$

$$\Rightarrow \lim_{N \to \infty} \int_{\partial Q_N} f(z) dz = 2\pi i \left(-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^2} + \frac{1}{a^2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+a)^2} = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{2\sin^2(\pi a)} - \frac{1}{2a^2}}}$$

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$,

Nun $f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{(2z-1)^2}$ mit Gleicher Abschätzung wie oben gilt $\lim_{N \to \infty} \int_{\partial Q_N} f(z) dz = 0$.

Residuen: $z_k = k \in \mathbb{Z}$, Pole 1. Ordn., $z_1 = 0.5$, Pol 2. Ordn.

$$\mathrm{Res}(f(z)|z_1) = \lim_{z \to 0.5} \frac{d}{dz} \left[\cancel{(z-0.5)^2} \frac{\pi \cot(\pi z)}{4 \cancel{(z-0.5)^2}} \right]$$

$$= \lim_{z \to 0.5} \frac{-\pi^2}{4\sin^2(\pi z)} = \frac{-\pi^2}{4\sin^2(\frac{\pi}{2})} = \underline{-\frac{\pi^2}{4}}$$

$$\mathrm{Res}(f(z)|z_k) = \frac{p(z)}{q'(z)} = \frac{\cancel{\pi \cos(\pi z_k)}}{(2z_k-1)^2 \cancel{\pi \cos(\pi z_k)} + \underbrace{4(2z-1)\sin(\pi z_k)}_{0}} = \underline{\frac{1}{(2k-1)^2}}$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \int_{\partial Q_N} f(z)\,dz = 2\pi i \left(-\frac{\pi^2}{4} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{für } k=0}}{1} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{8} - 2}}$$ Checke Lsg nicht (✓)

iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$.

$f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^4}$, Abschätzung wie oben: $\lim_{N\to\infty} \int_{\partial Q_N} f(z)\,dz = 0$

Residuen: $z=0$ Pol 5. Ordnung, $z_k = k \in \mathbb{Z}\setminus 0$ Pol erster Ordn.

$$\operatorname{Res}(f(z)|z_0) = a_1\left(\frac{\pi}{z^4}\left(\frac{1}{\pi z} - \frac{\pi}{3} z - \frac{\pi^3}{45} z^3 - \dots \right)\right) = \underline{-\frac{\pi^4}{45}}$$

$$\operatorname{Res}(f(z)|z_k) = \frac{p(z_k)}{q'(z_k)} = \frac{\cancel{\pi \cos(\pi z_k)}}{z_k^4 \cancel{\pi \cos(\pi z_k)} + \underbrace{4 z_k^3 \sin(\pi z_k)}_{0}} = \underline{\frac{1}{k^4}}$$

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \int_{\partial Q_N} f(z)\,dz = 2\pi i \left(-\frac{\pi^4}{45} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \underline{\underline{\frac{\pi^4}{90}}}$$ ✓

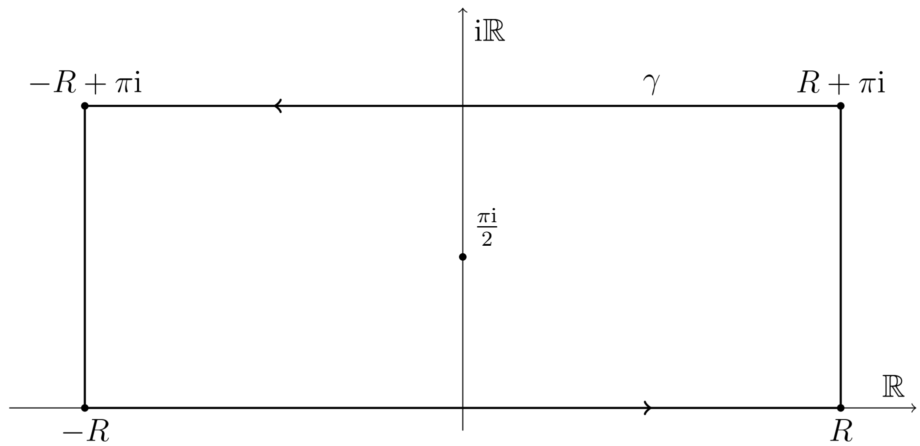


Abbildung 13.2: Der Weg zur Verwendung in Aufgabe (13.1l).

(13.1m) Betrachten Sie ausserdem die folgenden Aufgaben der alten Serien:

i. Aufgabe 6.5,

ii. Aufgaben 7.3a und 7.3b,

iii. Aufgabe 7.4,

iv. Aufgabe 7.5a.

Aufgabe 13.2 Verschiedene Aufgaben zu Fourierreihen

(13.2a) Berechnen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Fortsetzung von

$$f(t) := t, \qquad t \in [0, 2\pi).$$

(13.2b) Berechnen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Fortsetzung von

$$f(t) := |t|, \qquad t \in [-\pi, \pi).$$

(13.2c) Berechnen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Fortsetzung von

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } t \in [0, \pi), \\ -1 & \text{wenn } t \in [\pi, 2\pi). \end{cases}.$$

(13.2d) Berechnen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Fortsetzung von

$$f(t) := \begin{cases} \sin(t) & \text{wenn } t \in [0, \pi), \\ 0 & \text{wenn } t \in [\pi, 2\pi). \end{cases}.$$

(13.2e) Berechnen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Fortsetzung von

$$f(t) := |\sin(t)|, \qquad t \in [0, 2\pi).$$

(13.2f) Berechnen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Fortsetzung von

$$f(t) := \begin{cases} 1 - e^{-t} & \text{wenn } t \in [0, \pi), \\ e^{\pi - t} - e^{-t} & \text{wenn } t \in [\pi, 2\pi). \end{cases}.$$

(13.2g) Benutzen Sie Aufgabe (13.2a), um die Summen

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$, ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,

auszuwerten.

(13.2h) Benutzen Sie Aufgabe (13.2b), um die Summen

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$, ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$,

auszuwerten.

(13.2i) Benutzen Sie Aufgabe (13.2c), um die Summen

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)}$, ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$,

auszuwerten.

(13.2j) Benutzen Sie Aufgabe (13.2d), um die Summen

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$, ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$,

auszuwerten.

(13.2k) Benutzen Sie Aufgabe (13.2e), um die Summen

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$, ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$,

auszuwerten.

Aufgabe 13.3 Verschiedene Aufgaben zur Fouriertransformation

(13.3a) Berechnen Sie die Fouriertransformation von

$$f(t) := \frac{1}{t^2 + 6t + 13}.$$

Hinweis: Der Residuensatz kann bei dieser Aufgabe helfen.

(13.3b) Berechnen Sie die Fouriertransformation von

$$f(t) := \frac{t}{(t^2 + 1)^2}.$$

Hinweis: Der Residuensatz kann bei dieser Aufgabe helfen.

(13.3c) Berechnen Sie die Fouriertransformation von

$$f(t) := \frac{1}{(t^2 + 1)^2}.$$

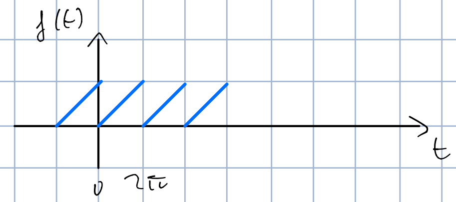
Hinweis: Der Residuensatz kann bei dieser Aufgabe helfen.

(13.3d) Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Aufgaben (13.3a)–(13.3c):

Aufgabe 13.2 Verschiedene Aufgaben zu Fourierreihen

(13.2a) Berechnen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Fortsetzung von

$$f(t) := t, \qquad t \in [0, 2\pi).$$



$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{T}\int_{T_0}^{T_0+T} f(t)\, e^{-\omega \frac{2\pi i}{T} t}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\, e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{(2\pi)(-i\omega)}\, t e^{-i\omega t}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{-i\omega}\, e^{-i\omega t}$$

$$= \frac{i}{\cancel{2\pi}\omega}\left(\cancel{2\pi}\, e^{-i2\pi\omega}\right) - \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{\omega^2}\underbrace{e^{-i2\pi\omega}}_{1} + \frac{1}{\omega^2}\right)$$

$$= \frac{i}{\omega}\underbrace{e^{-i2\pi\omega}}_{1} + \frac{1}{2\pi\omega^2}\underbrace{e^{-2\pi i\omega}}_{1} - \frac{1}{2\pi\omega^2} = \underline{\frac{i}{\omega}}$$

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\, dt = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2}4\pi^2\right) = \underline{\pi}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(t) = \sum_{\omega=-\infty}^{\infty}{}' \frac{i}{\omega}\, e^{i\omega t} \; ? \quad \text{oder} \quad \hat{f}(t) = \pi + \sum_{\omega=-\infty}^{-1}\frac{i}{\omega}\, e^{i\omega t} + \sum_{\omega=1}^{\infty}\frac{i}{\omega}\, e^{i\omega t} \; ?$$

Wir berechnen die reelle Fourierreihe:

$$a_0 = 2c_0 = 2\pi \qquad a_k = c_k + c_{-k} = 0 \qquad b_k = i(c_k - c_{-k}) = i\left(\frac{2i}{\omega}\right) = -\frac{2}{\omega}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(t) = \pi - 2\sum_{\omega=1}^{\infty}{}' \frac{1}{\omega}\sin(\omega t) \quad ✓$$

(13.2g) Benutzen Sie Aufgabe (13.2a), um die Summen

i. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$, ii. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$,

auszuwerten.

i) Wollen alternierende Reihe, werten $\hat{f}(t)$ in $t = \frac{\pi}{2}$ aus:

$$\hat{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi + 2\sum_{\omega=1}^{\infty}\frac{-\sin(\omega\frac{\pi}{2})}{\omega} = \pi + 2\sum_{\omega=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\omega}}{(2\omega-1)} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1} = \underline{\underline{-\frac{\pi}{4}}} \quad ✓$$

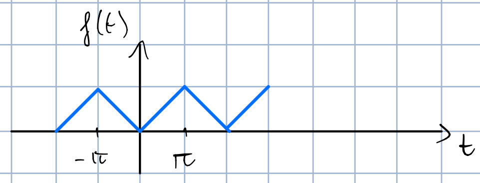
ii) Wollen nichtalternierende quadrierte Reihe, benutzen Parseval:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2\,dt = \pi^2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega=1}^{\infty}\frac{(-2)^2}{\omega^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{-\pi^2}{2} + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} t^2\,dt = \frac{-\pi^2}{2} + \frac{2\pi^2}{3} = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{6}}}$$ ✓

(13.2b) Berechnen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Fortsetzung von

$$f(t) := |t|, \qquad t \in [-\pi, \pi).$$



$\Rightarrow$ gerade Fkt $\Rightarrow$ $b_n = 0$, $a_n = \frac{4}{2\pi}\int_0^\pi t\cos(nt)$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\,dt = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\pi^2 = \underline{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t\cos(nt)\,dt = \underbrace{\frac{2}{\pi}\frac{t}{n}\sin(nt)\Big|_0^\pi}_{=0} - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(nt)}{n}\,dt$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_0^\pi = \frac{2\cos(n\pi)}{\pi n^2} - \frac{2}{\pi n^2} = \frac{2((-1)^n-1)}{\pi n^2}$$

$$= \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ -\frac{4}{\pi n^2} & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

n ungerade $\Rightarrow 2n+1$

$$\Rightarrow \hat{f}(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)t) \quad ✓$$

(13.2h) Benutzen Sie Aufgabe (13.2b), um die Summen

i. $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^2}$, ii. $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^4}$,

auszuwerten.

i) Nicht alternierend, nicht quadriert $\to$ suchen t: $\cos((2n-1)t) = 1$

$$\Rightarrow t = 0 \Rightarrow \hat{f}(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^2} \overset{!}{=} f(0) = 0$$

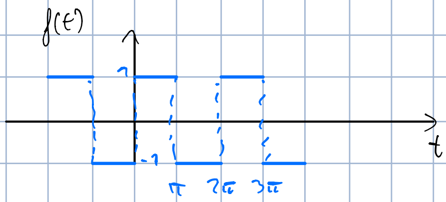
$$\Rightarrow \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^2} = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{8}}}$$

ii) Quadriert $\to$ Parseval: $\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |f(t)|^2\,dt = \frac{\pi^2}{4} + \cancel{\frac{1}{2}}\,\frac{\cancel{16}\,8}{\pi^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^4}$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n+1)^4} = -\frac{\pi^4}{32} + \frac{\pi}{8}\,\frac{1}{3}\pi^3 = \frac{\pi^4}{24} - \frac{\pi^4}{32} = \underline{\underline{\frac{\pi^4}{96}}} \quad ✓$$

(13.2c) Berechnen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Fortsetzung von

$$f(t) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } t \in [0, \pi), \\ -1 & \text{wenn } t \in [\pi, 2\pi). \end{cases}.$$



$f(t)$ ungerade $f(-t) = -f(t) \Rightarrow a_k = 0$

$$b_k = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(kt)\,dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kt)\,dt = -\frac{2}{k\pi} \cos(kt) \Big|_0^{\pi}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} 1\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} -1\,dt \right) = \frac{1}{\pi}\Big(\pi + (-2\pi + \pi) \Big) = \underline{0}$$

$$\Rightarrow b_k = -\frac{2}{k\pi}(-1)^k + \frac{2}{k\pi} = \begin{cases} 0 & , k \text{ gerade} \\ \frac{4}{k\pi} & , k \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(t) = \underline{\underline{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)t)}}$$

(13.2i) Benutzen Sie Aufgabe (13.2c), um die Summen

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)}$, ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$,

auszuwerten.

i) Alternierend, nicht quadriert $\rightarrow$ suchen t : $\sin((2k-1)t) = (-1)^k$

$$\Rightarrow t = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 = \hat{f}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)}$$

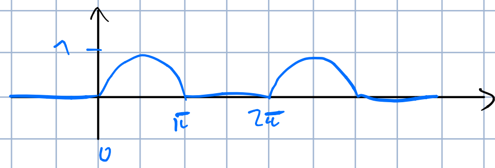
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)} = \underline{\underline{-\frac{\pi}{4}}}$$

ii) Quadriert $\rightarrow$ Parseval: $\underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1\,dt}_{1} = \cancel{\frac{1}{2}}\, \frac{\cancel{16}\; 8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \underline{\underline{\frac{\pi^2}{8}}}$$

(13.2d) Berechnen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Fortsetzung von

$$f(t) := \begin{cases} \sin(t) & \text{wenn } t \in [0,\pi), \\ 0 & \text{wenn } t \in [\pi, 2\pi). \end{cases}$$



$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\Big[-\cos(t)\Big]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{\pi}(1+1) = \underline{\frac{2}{\pi}}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\cos(kt)\,dt = \frac{1}{\pi}\Bigg(\underbrace{\frac{\sin(t)\sin(kt)}{k}\Bigg|_0^\pi}_{} - \int_0^\pi \frac{\cos(t)\sin(kt)}{k}\,dt\Bigg)$$

$$= \frac{-1}{k\pi}\Bigg(\frac{-\cos(t)\cos(kt)}{k}\Bigg|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(t)\cos(kt)}{k}\Bigg)^0 = \frac{\cos(t)\cos(kt)}{k^2\pi}\Bigg|_0^\pi + \frac{1}{k^2\pi}\int_0^\pi \ldots\,dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\cos(kt)\,dt = \frac{\dfrac{(-1)^{k+1}-1}{k^2\pi}}{1-\dfrac{1}{k^2}} = \frac{(-1)^{k+1}-1}{\pi(k^2-1)} = \underline{\begin{cases} 0, & k \text{ ungerade} \\ \dfrac{-2}{\pi(k^2-1)}, & \text{sonst} \end{cases}}$$

$\Rightarrow$ Singularität bei $k=1$: $a_1 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \sin(t)\cos(t)\,dt = \frac{\sin^2(t)}{2\pi}\Bigg|_0^\pi = \underline{0}$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\sin(kt)\,dt = \frac{1}{\pi}\Bigg(\underbrace{\frac{-\sin(t)\cos(kt)}{k}\Bigg|_0^\pi}_{0} + \int_0^\pi \frac{\cos(t)\cos(kt)}{k}\,dt\Bigg)$$

$$= \frac{1}{k\pi}\Bigg(\underbrace{\frac{\cos(t)\sin(kt)}{k}\Bigg|_0^\pi}_{0} + \int_0^\pi \frac{\sin(t)\sin(kt)}{k}\,dt\Bigg) = \frac{1}{k^2\pi}\int_0^\pi \sin(t)\sin(kt)\,dt$$

sieht man nur am Integral

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\sin(kt)\,dt = \frac{0}{1-\frac{1}{k^2}} = \frac{0}{k^2-1} = \underline{0}$$

bei 1 sing.

$$\Rightarrow b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^2(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}(1-\cos(2t))\,dt = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\sin(2t)\Big]_0^\pi$$

$$= \underline{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{\pi((2k)^2-1)} \cos(2kt)$$

(13.2j) Benutzen Sie Aufgabe (13.2d), um die Summen

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$, ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$,

auszuwerten.

i) Nicht quadriert $\Rightarrow$ suchen t : $\cos(2kt) = 1 \Rightarrow t = 0$

$$f(0) = 0 = \hat{f}(0) = \frac{1}{\pi} + 0 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$$ ✓

ii) Quadriert $\rightarrow$ Satz von Parseval:

Auch einzelstehende a_n, b_n Terme halbieren!

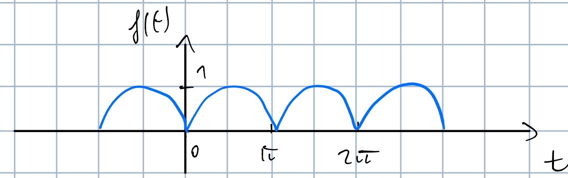
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin^2(t)\, dt = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1-\cos(2t))\, dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin(2t) \right]_0^{\pi} = \frac{1}{4}.$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2}\right)\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} = \frac{1}{16}(\pi^2 - 8)$$

(13.2e) Berechnen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Fortsetzung von

$$f(t) := |\sin(t)|, \qquad t \in [0, 2\pi).$$



Gerade Fkt $f(-t) = f(t) \Rightarrow b_k = 0$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\,dt = \frac{2}{\pi}\Big[-\cos(t)\Big]_0^\pi = \frac{4}{\pi}$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\cos(kt)\,dt = \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\frac{\sin(t)\sin(kt)}{k}\Big|_0^\pi}_{0} - \int_0^\pi \frac{\cos(t)\sin(kt)}{k}\,dt\right)$$

$$= \frac{-2}{k\pi}\left(-\frac{\cos(t)\cos(kt)}{k}\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin(t)\cos(kt)}{k}\,dt\right)$$

$$= \frac{2\cos(t)\cos(kt)}{k^2\pi}\Big|_0^\pi + \frac{2}{k^2\pi}\int_0^\pi \frac{\sin(t)\cos(kt)}{k}\,dt$$

$$= \frac{2(-1)^{k+1}}{k^2\pi} - \frac{2}{k^2\pi} + (\text{— " —})\ t$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\cos(kt)\,dt = \frac{\frac{2((-1)^{k+1}-1)}{k^2\pi}}{1-\frac{1}{k^2}} = \frac{2((-1)^{k+1}-1)}{\pi(k^2-1)} = \begin{cases} 0, & k \text{ ungerade} \\ \frac{-4}{\pi(k^2-1)} & \text{sonst} \end{cases}$$

Singularität bei $k = 1$: $a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(t)\cos(t) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin^2(t)}{2}\Big|_0^\pi = 0$

$$\Rightarrow \hat{f}(t) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4\cos(2kt)}{\pi(4k^2-1)}$$

(13.2k) Benutzen Sie Aufgabe (13.2e), um die Summen

i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$, ii. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$,

auszuwerten.

i) Nicht quadriert $\rightarrow$ wähle t: $\cos(2kt) = 1 \Rightarrow t = 0$

$$f(0) = 0 \overset{!}{=} \hat{f}(0) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$$

ii) Quadriert -> Parseval: $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2(t)\,dt = \frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{2}\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(4k^2-1)^2}$

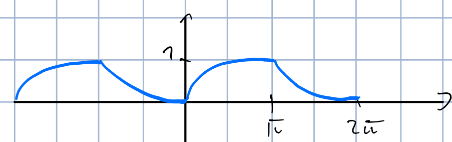
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1-\cos(2t))\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{1}{2}\pi = \underline{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right)\frac{\pi^2}{8} = \underline{\underline{\frac{1}{16}(\pi^2-8)}}$$

(13.2f) Berechnen Sie die Fourierreihe der 2π-periodischen Fortsetzung von

$$f(t) := \begin{cases} 1-e^{-t} & \text{wenn } t\in[0,\pi), \\ e^{\pi-t}-e^{-t} & \text{wenn } t\in[\pi,2\pi). \end{cases}$$



Weder gerade noch ungerade, gehen über die komplexe Darstellung:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\,dt = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-e^{-t})e^{-int}\,dt}_{(*)} + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(e^{\pi-t}-e^{-t})e^{-int}\,dt}_{(☆)}$$

$$\Rightarrow (*) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{-in}e^{-int}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}e^{(-in-1)t}\,dt = \frac{i}{2\pi n}((-1)^n-1) - \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{-in-1}e^{(-in-1)t}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{i((-1)^n-1)}{2\pi n} + \frac{(e^{-\pi}(-1)^n-1)}{2\pi(in+1)} = \frac{(-1)^n e^{-\pi}-1}{2\pi(1+n^2)} + \underline{\left(\frac{n-(-1)^n e^{-\pi}n}{2\pi(1+n^2)} + \frac{(-1)^n-1}{2\pi n}\right)i}$$

$$\Rightarrow (☆) = \frac{1}{2\pi}\left(\left.\frac{(e^{\pi-t}-e^{-t})e^{-int}}{-in}\right|_{\pi}^{2\pi} - \int_{\pi}^{2\pi}\frac{-(e^{\pi-t}-e^{-t})e^{-int}}{-in}\,dt\right)$$

$$= \frac{(e^{-\pi}-e^{-2\pi})e^{-in2\pi}}{-2\pi in} - \frac{(1-e^{-\pi})e^{-in\pi}}{-2\pi in} - \frac{1}{2\pi in}\int_{\pi}^{2\pi}(e^{\pi-t}-e^{-t})e^{-int}\,dt$$

$$\Rightarrow (☆) = \frac{\frac{(e^{-\pi}-e^{-2\pi})i}{2\pi n} - \frac{(1-e^{-\pi})(-1)^n i}{2\pi n}}{1+\frac{1}{in}} = \frac{(1-e^{-\pi})(-1)^n\cancel{n} - (e^{-\pi}-e^{-2\pi})\cancel{n}}{2\pi\cancel{n}(in+1)}$$

$$= \frac{(-1)^n-(-1)^n e^{-\pi}-e^{-\pi}+e^{-2\pi}}{2\pi(1+n^2)} + i\left(\frac{(-1)^n e^{-\pi}n-(-1)^n n+e^{-\pi}n-e^{-2\pi}n}{2\pi(1+n^2)}\right)$$

$$\Rightarrow c_n = \frac{\cancel{(-1)^n e^{-\pi}} - 1 + (-1)^n - \cancel{(-1)^n e^{-\pi}} - e^{-\pi} + e^{-2\pi}}{2\pi(n^2+1)} + \left(\frac{n - \cancel{(-1)^n e^{-\pi} n} + \cancel{(-1)^n e^{-\pi} n} - (-1)^n n + e^{-\pi} n - e^{-2\pi} n}{2\pi(1+n^2)} \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^n - 1}{2\pi n} \right) i = \frac{(-1)^n - 1 + e^{-2\pi} - e^{-\pi}}{2\pi(n^2+1)} + \left(\frac{n - (-1)^n n + e^{-\pi} n - e^{-2\pi} n}{2\pi(n^2+1)} + \frac{(-1)^n - 1}{2\pi n} \right) i$$

$$\Rightarrow c_n = \begin{cases} \dfrac{e^{-2\pi} - e^{-\pi} + (e^{-\pi} - e^{-2\pi}) n i}{2\pi(n^2+1)}, & n \text{ gerade} \\[2ex] \dfrac{-2 + e^{-2\pi} - e^{-\pi} + (2 + e^{-\pi} - e^{-2\pi}) n i}{2\pi(n^2+1)} - \dfrac{i}{\pi n}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (1 - e^{-t})\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} (e^{\pi - t} - e^{-t})\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[t + e^{-t} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \left[-e^{\pi - t} + e^{-t} \right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2} + \cancel{\frac{e^{-\pi}}{2\pi}} - \cancel{\frac{1}{2\pi}} + \frac{-e^{-\pi}}{2\pi} + \frac{e^{-2\pi}}{2\pi} + \cancel{\frac{1}{2\pi}} - \cancel{\frac{e^{-\pi}}{2\pi}}$$

$$= \underline{\frac{1}{2\pi} \left(\pi - e^{-\pi} + e^{-2\pi} \right)}$$

Reelle Koeff. berechnen:

$$a_0 = 2 c_0 = \underline{\frac{1}{\pi} \left(\pi - e^{-\pi} + e^{-2\pi} \right)}$$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \begin{cases} \dfrac{e^{-2\pi} - e^{-\pi}}{\pi(n^2+1)}, & n \text{ gerade} \\[2ex] \dfrac{-2 + e^{-2\pi} - e^{-\pi}}{\pi(n^2+1)}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Sollte stimmen?

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \begin{cases} \dfrac{(e^{-2\pi} - e^{-\pi}) n}{\pi(n^2+1)}, & n \text{ gerade} \\[2ex] \dfrac{(e^{-2\pi} - e^{-\pi} - 2) n}{\pi(n^2+1)} + \dfrac{2}{\pi n}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\pi - e^{-\pi} + e^{-2\pi}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{-2\pi} - e^{-\pi}}{\pi(4n^2+1)}\right)\cos(2nt) + \left(\frac{e^{-2\pi} - e^{-\pi}}{\pi(4n^2+1)}\right) n\sin(2nt)$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2 + e^{-2\pi} - e^{-\pi}}{\pi\left((2n-1)^2+1\right)}\right)\cos\left((2n-1)t\right) + \left(\frac{e^{-2\pi} - e^{-\pi} - 2}{\pi\left((2n-1)^2+1\right)} + \frac{2}{\pi(2n-1)}\right) n\sin\left((2n-1)t\right)$$

Kann man es so aufteilen?

vlt besser:

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\pi - e^{-\pi} + e^{-2\pi}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\left((-1)^n - 1\right) + e^{-2\pi} - e^{-\pi}}{\pi(n^2+1)}\right)\cos(nt)$$

$$+ \left(\frac{2\left((-1)^n - 1\right) + e^{-2\pi} - e^{-\pi}}{\pi(n^2+1)} + \frac{1-(-1)^n}{\pi n}\right)\sin(nt)$$

i. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(3t)}{t^2+6t+13}\,\mathrm{d}t$,

ii. $\int_{0}^{\infty} \frac{t\sin(7t)}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$,

iii. $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(13t)}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t$,

iv. $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(t)}{(t^2+2t+2)^2}\,\mathrm{d}t$.

(13.3e) Berechnen Sie die Fouriertransformation der Funktion

$$f(t) := \frac{t^2+2}{t^4+4}.$$

Berechnen Sie dann den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+2)^2}{(x^4+4)^2}.$$

(13.3f) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x.$$

(13.3g) Sei $\alpha > 0$. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$-u''(t) + \alpha^2 u(t) = h(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

wobei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine absolut integrierbare, stetige Funktion ist, mit Hilfe der Fouriertransformation.

Hinweis: Die Lösung kann in Abhängigkeit von h angegeben werden, wenn man den Faltungssatz verwendet.

(13.3h) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ y > 0,$$

mit Nebenbedingung $u(x,0) = h(x)$, wobei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine absolut integrierbare, stetige Funktion ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Fouriertransformation und den Faltungssatz. Beachten Sie bei der Lösung des Systems, dass die Fouriertransformation von $u(\cdot, y)$ beschränkt sein soll.

(13.3i) Sei $\alpha > 0$. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x), \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

mit Nebenbedingung $u(x,0) = h(x)$, wobei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine absolut integrierbare, stetige Funktion ist.

(13.3j) Betrachten Sie ausserdem noch einmal die folgenden Aufgaben aus den Serien:

Aufgabe 13.3 Verschiedene Aufgaben zur Fouriertransformation

(13.3a) Berechnen Sie die Fouriertransformation von

$$f(t) := \frac{1}{t^2+6t+13}.$$

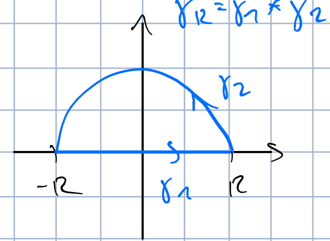
Hinweis: Der Residuensatz kann bei dieser Aufgabe helfen.

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ist}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{e^{-ist}}{t^2+6t+13}}_{g(z)}\,dt$$

Wir wollen den Residuensatz auf das gegebene Integral anwenden und unterscheiden deshalb:

$\underline{s<0}$: Wir betrachten folgenden Weg mit $R\to\infty$:

$\gamma_1(t) = -R+2Rt,\ t\in[0,1],\ \gamma_2(t) = Re^{\pi i t},\ t\in[0,1]$



Nach Res. Satz gilt:

$$\int_{\gamma_R} g(z)\,dz = \int_{\gamma_1} g(z)\,dz + \int_{\gamma_2} g(z)\,dz = 2\pi i \sum_{Im(z_i)>0} Res(g(z)|z_i)$$

Residuen: e^{-isz} hat keine Pole, $z^2+6z+13=0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-6\pm\sqrt{36-52}}{2}$

Uns interessiert nur $z_1 = \underline{-3+2i}$, Pol 1. Ordnung

$$Res(g(z)|z_1) = \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{e^{-isz_1}}{2z_1+6} = \underline{\frac{e^{-is(-3+2i)}}{4i}}$$

s<0 Voraussetzung

Z.z.: $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} g(z)\,dz = 0$:

>0 für $t\in[0,1]$

$$\left|\lim_{R\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{-isRe^{\pi i t}}\,R\pi i e^{\pi i t}}{R^2e^{2\pi i t}+6Re^{\pi i t}+13}\,dt\right| \le \int_0^1 \lim_{R\to\infty}\left|\frac{e^{-isR\cos(\pi t)}\,e^{sR\sin(\pi t)}\,R\pi i e^{\pi i t}}{R^2e^{2\pi i t}+6Re^{\pi i t}+13}\right|dt$$

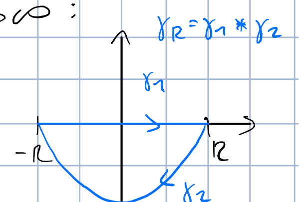
$$\le \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \frac{R\pi}{R^2-6R-13}\,dt = \int_0^1 0\,dt = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} g(z)\,dz = \int_{\gamma_1} g(z)\,dz + 0 \xrightarrow{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ist}}{t^2+6t+13}\,dt = 2\pi i\left(\frac{e^{-is(3+2i)}}{4i}\right) = \underline{\frac{\pi}{2}e^{-is(-3+2i)}}$$

für $s<0$

$\underline{s\ge 0}$: Nun betrachten wir folgenden Weg mit $R\to\infty$:

$\gamma_1(t) = -R+2Rt,\ t\in[0,1],\ \gamma_2(t) = Re^{-\pi i t},\ t\in[0,1]$



Nach Res. Satz gilt:

Orientierung!

$$\int_{\gamma_R} g(z)\,dz = \int_{\gamma_1} g(z)\,dz + \int_{\gamma_2} g(z)\,dz = -2\pi i \sum_{Im(z_i)<0} Res(g(z)|z_i)$$

Residuen: Gleiche Fkt, spricht uns interessiert nur z_2

$$Res(g(z)|z_2) = \frac{p(z_2)}{q'(z_2)} = \frac{e^{-isz_2}}{2z_2+6} = \frac{e^{-is(-3-2i)}}{-4i}$$

≥0 Voraussetzung

>0 für $t\in[0,1]$

Z.z.: $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} g(z)\,dz = 0$

$$\left|\lim_{R\to\infty}\int_0^1 \frac{e^{-isRe^{-i\pi t}}\left(-R\pi i e^{-\pi i t}\right)}{R^2e^{-2\pi i t}+6Re^{-\pi i t}+13}\,dt\right| \le \int_0^1 \lim_{R\to\infty}\left|\frac{-e^{-isR\cos(\pi t)}\, e^{-sR\sin(\pi t)}\, R\pi i e^{-\pi i t}}{R^2e^{-2\pi i t}+6e^{-\pi i t}+13}\right| dt$$

$$\le \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \frac{R\pi}{R^2-6R-13}\,dt = \int_0^1 0\,dt = \underline{0}$$

Orientierung

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} g(z)\,dz = \int_{\gamma_1} g(z)\,dz + 0 \xrightarrow{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ist}}{t^2+6t+13}\,dt = -2\pi i\left(\frac{e^{-is(-3-2i)}}{-4i}\right) = \underline{\frac{\pi}{2}e^{-is(-3-2i)}}$$

Betrachtet man nun $s \gtrless 0$, so findet man

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ist}}{t^2+6t+13}\,dt = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}e^{3is}e^{-2|s|}}} ✓$$

$|s|$, da es bei einem Vorzeichenwechsel von s nicht das Vorzeichen wechselt.

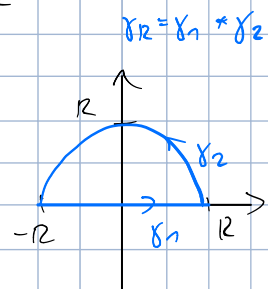
(13.3b) Berechnen Sie die Fouriertransformation von

$$f(t) := \frac{t}{(t^2+1)^2}.$$

Hinweis: Der Residuensatz kann bei dieser Aufgabe helfen.

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{te^{-ist}}{\underbrace{(t^2+1)^2}}\,dt$$

Wollen das Integral mithilfe des Residuensatzes berechnen und unterscheiden deshalb: $g(z) := \frac{ze^{-isz}}{(z^2+1)^2}$



$\underline{s<0}$: Wir betrachten folgenden Weg für $R\to\infty$:

$\gamma_1(t) = -R+2Rt,\ t\in[0,1],\ \gamma_2(t) = Re^{\pi i t},\ t\in[0,1]$

Nach Res. Satz gilt:

$$\int_{\gamma_R} g(z)\,dz = \int_{\gamma_1} g(z)\,dz + \int_{\gamma_2} g(z)\,dz = 2\pi i \sum_{Im(z_i)>0} Res(g(z)|z_i)$$

Residuen: e^{-isz} keine Pole, $z^2 = -1 \Rightarrow z_1 = i$, $z_2 = -i$ Pole 2. Ordn.

Uns interessiert nur z_1 mit $Im > 0$:

$$Res(g(z)|z_1) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[\cancel{(z-i)^2}\frac{z e^{-isz}}{\cancel{(z-i)^2}(z+i)^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{(e^{-isz} - isz e^{-isz})(z+i)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(z+i)}\, z e^{-isz}}{(z+i)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{(\cancel{e^s} + s e^s)\cdot \cancel{2i} - \cancel{2i e^s}}{-\cancel{8i}\,4} = \underline{\frac{-se^s}{4}}$$

<0 Voraussetzung

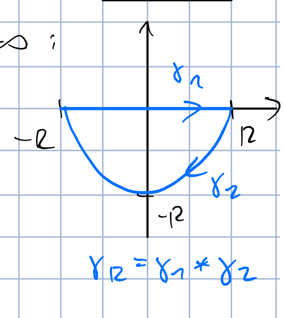
Z.z.: $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} g(z)\,dz = 0$

$$\left|\lim_{R\to\infty} \int_0^1 \frac{Re^{\pi i t} e^{-isRe^{\pi i t}} R\pi i e^{\pi i t}}{(R^2 e^{2\pi i t}+1)^2} dt\right| \le \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \left| \frac{R^2 \pi i e^{2\pi i t} e^{-isR\cos \pi t} e^{\overbrace{sR\sin\pi t}^{>0 \text{ für } t\in[0,1]}}}{(R^2 e^{2\pi i t}+1)^2} \right| dt$$

$$\le \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \frac{R^2\pi}{(R^2-1)^2} dt = \int_0^1 0\,dt = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} g(z)\,dz = \int_{\gamma_1} g(z)\,dz + 0 \xrightarrow{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z e^{-isz}}{(z^2+1)^2} dz = 2\pi i \left(\frac{-se^s}{4}\right) = \underline{\frac{-\pi i s e^s}{2}}$$

<u>$s \ge 0$:</u> Nun betrachten wir folgenden Weg mit $R\to\infty$:



$\gamma_1(t) = -R + 2Rt$, $t\in[0,1]$, $\gamma_2(t) = Re^{-\pi i t}$, $t \in [0,1]$

Nach Res. Satz folgt:

Orientierung?

$$\int_{\gamma_R} g(z)\,dz = \int_{\gamma_1} g(z)\,dz + \int_{\gamma_2} g(z)\,dz = -2\pi i \sum_{Im(z_i)<0} Res(g(z)|z_i)$$

Residuen: Wie oben, diesmal $z_2 = -i$ im Weg:

$$Res(g(z)|z_2) = \lim_{z\to -i} \frac{d}{dz}\left[\cancel{(z+i)^2}\frac{z e^{-isz}}{(z-i)^2\cancel{(z+i)^2}}\right]$$

$$= \lim_{z \to -i} \frac{(e^{-isz} - isz e^{-isz})(z-i)^{2} - 2(\cancel{z-i}) z e^{-isz}}{(z-i)^{\cancel{4}3}}$$

$$= \frac{(e^{-s} - se^{-s})(\cancel{-2i}) - (\cancel{-2i}) e^{-s}}{(\cancel{-2i})(-4)} = \frac{-se^{-s}}{-4} = \underline{\frac{se^{-s}}{4}}$$

Z.z.: $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} g(z)\,dz = 0$

$$\left|\lim_{R\to\infty} \int_0^1 \frac{Re^{-\pi i t} e^{-isRe^{-\pi i t}} (-R\pi i e^{-\pi i t})}{(R^2 e^{-2\pi i t} + 1)^2} dt \right|$$ > 0 für $t \in [0,1]$

≥ 0 Voraussetzung

$$\leq \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \left| \frac{-R^2 \pi i e^{-2\pi i t} e^{-isR\cos\pi t} e^{-sR\sin\pi t}}{(R^2 e^{-2\pi i t} + 1)^2} \right| dt$$

$$\leq \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \frac{R^2 \pi}{(R^2-1)^2} dt = \int_0^1 0\, dt = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} g(z)\,dz = \int_{\gamma_1} g(z)\,dz + 0 \xrightarrow{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ze^{-isz}}{(z^2+1)^2} dz = -2\pi i \left(\frac{se^{-s}}{4}\right) = \underline{-\frac{\pi i}{2} se^{-s}}$$

Betrachten wir nun alle $s \in \mathbb{R}$, so finden wir:

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{te^{-ist}}{(t^2+1)^2} dt = \underline{\underline{-\frac{\pi i}{2} s e^{-|s|}}}$$ ✓

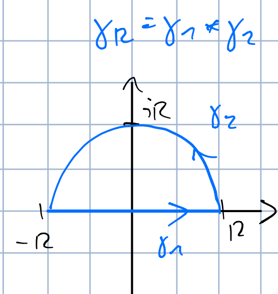
(13.3c) Berechnen Sie die Fouriertransformation von

$$f(t) := \frac{1}{(t^2+1)^2}.$$

Hinweis: Der Residuensatz kann bei dieser Aufgabe helfen.

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{e^{-ist}}{(t^2+1)^2}}_{g(z) := \frac{e^{-isz}}{(z^2+1)^2}} dt$$

Wir wollen das Integral mittels Residuensatz berechnen und unterscheiden deshalb:



$\underline{s < 0}$: Wir betrachten folgenden Weg mit $R \to \infty$:

$\gamma_1(t) = -R + 2Rt,\ t \in [0,1],\ \gamma_2(t) = Re^{\pi i t},\ t \in [0,1]$

Nach Res. Satz gilt:

$$\int_{\gamma_R} g(z)\,dz = \int_{\gamma_1} g(z)\,dz + \int_{\gamma_2} g(z)\,dz = 2\pi i \sum_{Im(z_i)>0} Res(g(z)|z_i)$$

Residuen: e^{-isz} kein Pol, $z^2 = -1 \Rightarrow z_1 = i$, $z_2 = -i$ Pole 2. Ordn.

Uns interessiert nur z_1 mit $Im > 0$:

$$Res(g(z)|z_1) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left[\cancel{(z-i)^2}\,\frac{e^{-isz}}{\cancel{(z-i)^2}(z+i)^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{-is\,e^{-isz}(z+i)^2 - 2(z+i)e^{-isz}}{(z+i)^4}$$

$$= \frac{-is\,e^{s}(2i)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(2i)}e^{s}}{(2i)^{\cancel{4}3}} = \underline{\underline{\frac{2e^s(s-1)}{-8i}}}$$

<0 Voraussetz.

Z.z.: $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} g(z)\,dz$

>0 für $t \in [0,1]$

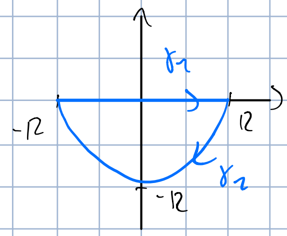
$$\left|\lim_{R\to\infty}\int_0^1 \frac{R\pi i e^{\pi i t} e^{-isRe^{\pi i t}}}{(R^2e^{2\pi i t}+1)^2}\,dt\right| \leq \int_0^1 \lim_{R\to\infty}\left|\frac{R\pi i e^{\pi i t}\, e^{-isR\cos\pi t}\, e^{\underset{\sim}{sR\sin\pi t}}}{(R^2e^{2\pi i t}+1)^2}\right| dt$$

$$\leq \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \frac{R\pi}{(R^2-1)^2}\,dt = \int_0^1 0\,dt = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} g(z)\,dz = \int_{\gamma_1} g(z)\,dz + 0 \xrightarrow{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-isz}}{(z^2+1)^2}\,dz = 2\pi \cancel{i}\left(\frac{2e^s(s-1)}{-8\cancel{i}}\right)$$

$$= \underline{-\frac{\pi}{2}e^s(s-1)}$$

$\underline{s \geq 0:}$ Nun betrachten wir folgenden Weg:



$\gamma_R = \gamma_1 * \gamma_2$

$\gamma_1(t) = -R + 2Rt$, $t \in [0,1]$, $\gamma_2(t) = Re^{-\pi i t}$, $t \in [0,1]$

Nach Res. Satz gilt:

Umlaufsinn!

$$\int_{\gamma_R} g(z)\,dz = \int_{\gamma_1} g(z)\,dz + \int_{\gamma_2} g(z)\,dz = -2\pi i \sum_{Im(z_i)<0} Res(g(z)|z_i)$$

Residuen: Wie oben, nur interessiert $z_2 = -i$

$$\operatorname{Res}(g(z)|z_2) = \lim_{z\to -i} \frac{d}{dz}\left[(\cancel{z+i})^2 \frac{e^{-isz}}{(z-i)^2(\cancel{z+i})^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to -i} \frac{-ise^{-isz}(z-i)^{\cancel{2}} - 2(\cancel{z-i})e^{-isz}}{(z-i)^{\cancel{4}3}}$$

$$= \frac{-ise^{-s}(-2i) - 2e^{-s}}{8i} = \underline{\frac{2e^{-s}(-s-1)}{8i}}$$

Z.z: $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} g(z)\,dz = 0$

$$\left|\lim_{R\to\infty}\int_0^1 \frac{-R\pi i e^{-\pi i t} e^{-isRe^{-\pi i t}}}{(R^2e^{-2\pi i t}+1)^2}\,dt\right| \le \int_0^1 \lim_{R\to\infty}\left|\frac{-R\pi i e^{-\pi i t} e^{-isR\cos\pi t} e^{\overset{\geq 0 \text{ Voraussetzung}}{-s}R\underbrace{\sin\pi t}_{>0 \text{ für } t\in[0,1]}}}{(R^2e^{-2\pi i t}+1)^2}\right|dt$$

$$\le \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \frac{R\pi}{(R^2-1)^2}\,dt = \int_0^1 0\,dt = \underline{0}$$

$$\overset{R\to\infty}{=} \int_{\gamma_R} g(z)\,dz = \int_{\gamma_1} g(z)\,dz + 0 \overset{R\to\infty}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-isz}}{(z^2+1)^2}\,dz = -2\pi i\left(\frac{2e^{-s}(-s-1)}{8i}\right)$$

$$= \underline{\frac{-\pi}{2} e^{-s}(-s-1)}$$

Betrachten wir nun alle $s\in\mathbb{R}$, so finden wir

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ist}}{(t^2+1)^2} = \underline{\frac{\pi}{2} e^{-|s|}(1+|s|)}$$ ✓

(13.3d) Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Aufgaben (13.3a)–(13.3c):

i. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(3t)}{t^2+6t+13}\,dt$,

ii. $\int_0^{\infty} \frac{t\sin(7t)}{(t^2+1)^2}\,dt$,

iii. $\int_0^{\infty} \frac{\cos(13t)}{(t^2+1)^2}\,dt$,

iv. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t)}{(t^2+2t+2)^2}\,dt$.

i) Aus 13.3a) wissen wir, dass $\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ist}}{t^2+6t+13} dt = \frac{\pi}{2} e^{3is} e^{-2|s|}$

ist, es folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(3t)}{t^2+6t+13} dt = \operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i3t}}{t^2+6t+13} dt\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{\pi}{2} e^{-9i} e^{-6}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{2} e^{-6} \sin(9)$$

ii) Aus 13.3b) wissen wir, dass $\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{te^{-ist}}{(t^2+1)^2} dt = -\frac{\pi i}{2} s e^{-|s|}$

ist, es folgt:

$$\int_{0}^{\infty} \underbrace{\frac{t\sin(7t)}{(t^2+1)^2}}_{\text{gerade!}} dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\sin(7t)}{(t^2+1)^2} dt = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{te^{i7t}}{(t^2+1)^2} dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(-\frac{\pi i}{2}(-7)e^{-7}\right)$$

$$= \frac{7\pi}{2} e^{-7}$$

iii) Aus 13.3c) wissen wir, dass $\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ist}}{(t^2+1)^2} dt = \frac{\pi}{2} e^{-|s|}(1+|s|)$

ist, daraus folgt:

$$\int_{0}^{\infty} \underbrace{\frac{\cos(13t)}{(t^2+1)^2}}_{\text{gerade!}} dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(13t)}{(t^2+1)^2} dt = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i13t}}{(t^2+1)^2} dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\frac{\pi}{2} e^{-13}(1+13)\right)$$

$$= \frac{\pi e^{-13}\cdot 14}{4} = \frac{7\pi e^{-13}}{2}$$

iv) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t)}{(t^2+2t+2)^2}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(t)}{((t+1)^2+1)^2} = Re\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it}}{((t+1)^2+1)^2}\,dt\right)$

Aus 13.3c) können wir $\hat{f}(s)$ ableiten:

$$f(t-a) \circ\!\!-\!\!\bullet\; e^{-isa}\hat{f}(s)$$

$$\Rightarrow \hat{f}(t+1) = e^{is}\hat{f}(s) = e^{is}\left(\frac{\pi}{2}e^{-|s|}(1+|s|)\right)$$

Daraus folgt nun direkt:

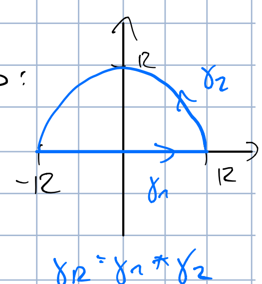
$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(t)}{(t^2+2t+2)^2}\,dt = Re\left(e^{-i}\frac{\pi}{2}e^{-|s|}(1+|s|)\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\cos(1)\,e^{-1}(2) = \underline{\underline{\frac{\pi}{e}\cos(1)}}$$

Kontrolle:

$$f(z) = \frac{1}{(t^2+2t+2)^2} \qquad \hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ist}}{(t^2+2t+2)^2}\,dz$$

Wollen den Residuensatz anwenden und unterscheiden deshalb:



$\underline{s<0}$: Wir integrieren über folgenden Weg mit $R\to\infty$:

$\gamma_1(t) = -R+2Rt,\ t\in[0,1],\ \gamma_2(t) = Re^{\pi i t},\ t\in[0,1]$

Nach Res. Satz gilt:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{Im(z_i)>0} Res(f(z)|z_i)$$

Residuen: e^{-isz} keine Pole, $z^2+2z+2=0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-2\pm\sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$

Uns interessiert nur z_1 mit $\operatorname{Im}>0$, Pol 2. Ordn.

$$\operatorname{Res}(f(z)|z_1) = \lim_{z_1\to -1+i} \frac{d}{dz}\left[\cancel{(z+1-i)^2} \frac{e^{-isz}}{\cancel{(z+1-i)^2}(z+1+i)^2} \right]$$

$$= \lim_{z\to -1+i} \frac{-is\, e^{-isz}(z+1+i)^{\cancel{2}} - 2\cancel{(z+1+i)}\, e^{-ist}}{(z+1+i)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{-is\, e^{-is(-1+i)}\, 2i - 2e^{-is(-1+i)}}{-8i}$$

$$\frac{\pi}{2} e^{is} e^{-|s|}(1+|s|)$$

$$= \frac{2s e^{is} e^{s} - 2e^{is}e^{s}}{-8i} = \frac{e^{is}e^{s}(s-1)}{-4i} = \frac{e^{is}e^{s}(1-s)}{4i}$$

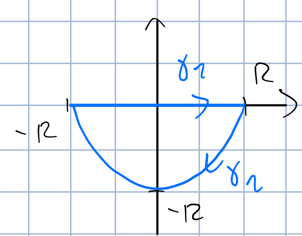
Z.z.: $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$

$$\left|\lim_{R\to\infty} \int_0^1 \frac{R\pi i e^{\pi i t} e^{-isRe^{\pi i t}}}{(R^2 e^{2\pi i t} + 2Re^{\pi i t}+2)^2}\,dt\right| \le \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \left| \frac{R\pi i e^{\pi i t}\, e^{-isR\cos(\pi t)}\, e^{\overbrace{s}^{<0 \text{ Voraussetz.}}\overbrace{R\sin(\pi t)}^{>0 \text{ für } t\in[0,1]}}}{(R^2 e^{2\pi i t} + 2Re^{\pi i t} + 2)^2} \right|$$

$$\le \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \frac{R\pi}{(R^2-2R-R)^2}\,dt = \int_0^1 0\,dt = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + 0 \xrightarrow{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ist}}{(t^2+2t+2)^2}\,dt = 2\pi i \left(\frac{e^{is}e^{s}(1-s)}{4i} \right)$$

$$= \underline{\frac{\pi}{2} e^{is} e^{s} (1-s)}$$



$\underline{s \ge 0}$: Nun integrieren wir über

$\gamma_1(t) = -R+2Rt$, $t\in[0,1]$, $\gamma_2(t) = Re^{-\pi i t}$, $t\in[0,1]$

Nach Res. Satz gilt:

Umlaufsinn?

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = -2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_i)<0} \operatorname{Res}(f(z)|z_i)$$

$\gamma_R = \gamma_1 * \gamma_2$

Residuen: Wie oben, nun interessiert $z_2 = -1-i$

$$\mathrm{Res}(f(z)|z_2) = \lim_{z\to -1-i} \frac{d}{dz}\left[(\cancel{z+1+i})^2 \frac{e^{-isz}}{(z+1-i)^2 (\cancel{z+1+i})^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to -1-i} \frac{-is e^{-isz}(z+1-i)^{2} - 2(\cancel{z+1-i}) e^{-isz}}{(z+1-i)^{3}}$$

$$= \frac{-2se^{-is(-1-i)} - 2e^{-is(-1-i)}}{8i} = \frac{e^{is}e^{-s}(-s-1)}{4i}$$

Z.z.: $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$

$$\left|\lim_{R\to\infty}\int_0^1 \frac{-R\pi i e^{-\pi i t} e^{-isRe^{-\pi i t}}}{(R^2 e^{-2\pi i t} + 2Re^{-\pi i t} + 2)^2} dt\right| \leq \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \left| \frac{-R\pi i e^{-\pi i t} e^{-isR\cos(\pi t)} e^{\overbrace{-sR\sin(\pi t)}^{\substack{>0 \text{ Voraussetz.} \\ >0 \text{ f. } t\in[0,1]}}}}{(R^2 e^{-2\pi i t} + 2Re^{-\pi i t} + 2)^2}\right| dt$$

$$\leq \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \frac{R\pi}{(R^2-2R-2)^2} dt = \int_0^1 0\, dt = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z) + 0 \overset{R\to\infty}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-isz}}{(z^2+2z+2)^2} dz = -2\pi i \left(\frac{e^{is}e^{-s}(-s-1)}{4i}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi}{2} e^{is} e^{-s} (1+s)}}$$

Betrachten wir nun $s \in \mathbb{R}$ so finden wir:

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ist}}{(t^2+2t+2)^2} dt = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} e^{is} e^{-|s|}(1+|s|)}}$$

Also die Fouriertransformation von oben stimmt :D

(13.3e) Berechnen Sie die Fouriertransformation der Funktion

$$f(t) := \frac{t^2+2}{t^4+4}.$$

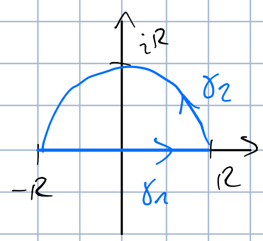
Berechnen Sie dann den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2+2)^2}{(x^4+4)^2}.$$

$$f(z) = \frac{z^2+2}{z^4+4} e^{-ist}$$

Wollen den Residuensatz anwenden und unterscheiden deshalb:

<u>$s < 0$</u> : Integrieren über folgenden Weg mit $R \to \infty$



$\gamma_R = \gamma_1 * \gamma_2$

$\gamma_1(t) = -R + 2Rt, \ t \in [0,1] \quad \gamma_2(t) = Re^{\pi i t}, \ t \in [0,1]$

Nach Res. Satz gilt:

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_i)>0} \operatorname{Res}(f(z)|z_i)$$

Residuen: $z^4 = -4 = 4e^{\pi i} \Rightarrow z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}} \quad z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{3\pi i}{4}}$

Uns interessieren z_1, z_2 mit $\operatorname{Im} > 0$: $\quad z_3 = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi i}{4}} \quad z_4 = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi i}{4}}$

Pole 1. Ordn

$$\operatorname{Res}(f(z)|z_1) = \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{(z_1^2+2)e^{-isz_1}}{4z_1^3} = \frac{(2e^{\frac{\pi i}{2}}+2)e^{-is\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}}}{8\sqrt{2}\,e^{\frac{3\pi i}{4}}}$$

$$= \frac{2(i+1)e^{-is\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)}}{4\,8\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)} = \frac{(i+1)e^{-is}e^{s}}{4(-1+i)} = \frac{(1+i)(-1-i)e^{-is}e^{s}}{8}$$

$$= \frac{-2ie^{-is}e^{s}}{8} = \underline{-\frac{i}{4}e^{-is}e^{s}}$$

$$\operatorname{Res}(f(z)|z_2) = \frac{(z_2^2+2)e^{-isz_2}}{4z_2^3} = \frac{(2e^{\frac{6\pi i}{4}}+2)e^{-is\sqrt{2}e^{\frac{3\pi i}{4}}}}{8\sqrt{2}\,e^{\frac{9\pi i}{4}}}$$

$$= \frac{2(-i+1)e^{-is\sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)}}{4\,8\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i)} = \frac{(-i+1)(1-i)e^{is}e^{s}}{8} = \underline{-\frac{i}{4}e^{is}e^{s}}$$

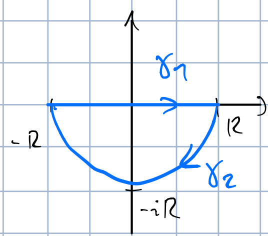
Z.z.: $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$

$$\left|\lim_{R\to\infty}\int_0^1 \frac{(R^2 e^{2\pi i t}+2)R\pi i e^{\pi i t}\, e^{-isRe^{\pi i t}}}{R^4 e^{4\pi i t}+4}\,dt\right| \le \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \left|\frac{(R^2 e^{2\pi i t}+2)R\pi i e^{\pi i t}\, e^{-isR\cos\pi t}\, \overset{<0?}{e^{\overbrace{sR\sin\pi t}^{>0\ t\in[0,1]}}}}{R^4 e^{4\pi i t}+4}\right| dt$$

$$\le \int_0^1 \lim_{R\to\infty}\frac{(R^2+2)R\pi}{R^4-4}\,dt = \int_0^1 0\,dt = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + 0 \overset{R\to\infty}{=} \int_{-\infty}^{\infty}\frac{(t^2+2)e^{-ist}}{t^4+4}\,dt = 2\pi i\left(-\frac{i}{4}e^s\left(e^{is}+e^{-is}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}e^s\left(e^{is}+e^{-is}\right) = \underline{\pi e^s\cos(s)}$$



$\underline{s\geq 0}$: Nun integrieren wir über folgenden Weg:

$\gamma_1(t) = -R+2Rt$, $t\in[0,1]$, $\gamma_2(t) = Re^{-\pi i t}$, $t\in[0,1]$

Laut Res. Satz gilt: Umlaufrichtung?

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \underset{\uparrow}{-}2\pi i \sum_{\mathrm{Im}(z_i)<0} \mathrm{Res}(f(z)|z_i)$$

$\gamma_R = \gamma_1 * \gamma_2$

Residuen: Wie oben, nun interessieren uns z_3 & z_4, Pole 1. Ordn.

$$\mathrm{Res}(f(z)|z_3) = \frac{p(z_3)}{q'(z_3)} = \frac{(z_3^2+2)e^{-isz_3}}{4z_3^3} = \frac{\left(2e^{\frac{10\pi i}{4}}+2\right)e^{-is\sqrt{2}e^{\frac{5\pi i}{4}}}}{8\sqrt{2}\,e^{\frac{15\pi i}{4}}}$$

$$= \frac{2(i+1)\,e^{-is\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}}{8\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)} = \frac{(i+1)(1+i)\,e^{is}e^{-s}}{8} = \underline{\frac{i}{4}e^{is}e^{-s}}$$

$$\mathrm{Res}(f(z)|z_4) = \frac{\left(2e^{\frac{14\pi i}{4}}+2\right)e^{-is\sqrt{2}e^{\frac{7\pi i}{4}}}}{8\sqrt{2}\,e^{\frac{21\pi i}{4}}} = \frac{2(-i+1)\,e^{-is}e^{-s}}{8(-1-i)}$$

$$= \frac{(1-i)(-1+i)\,e^{-is}e^{-s}}{8} = \underline{\frac{i}{4}e^{-is}e^{-s}}$$

Z.z.: $\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz = 0$

$$\left|\lim_{R\to\infty}\int_0^1 \frac{(R^2 e^{-2\pi i t}+2)(-R\pi i e^{-\pi i t})e^{-isRe^{-\pi i t}}}{(R^4 e^{-4\pi i t}+4)}\,dt\right| \leq \int_0^1 \lim_{R\to\infty}\left|\frac{-(R^2 e^{-2\pi i t}+2)R\pi i\, e^{-\pi i t}\, e^{-isR\cos\pi t}\, e^{-\overset{>0}{s}\overbrace{R\sin\pi t}^{>0}}}{(R^4 e^{-4\pi i t}+4)}\right| dt$$

$$\leq \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \frac{(R^2+2)R\pi}{R^4-4}\,dt = \int_0^1 0\,dt = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + 0 = \int_{-\infty}^{\infty}{}^{R\to\infty} \frac{(t^2+2)e^{-ist}}{(t^4+4)}\,dt = -2\pi i\left(\frac{i}{4}e^{-s}\left(e^{is}+e^{-is}\right)\right)$$

$$= \underline{\pi e^{-s}\cos(s)}$$

Betrachtet man nun $\hat{f}(s)$ $\forall s\in\mathbb{R}$ so findet man:

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{(t^2+2)e^{-ist}}{(t^4+4)}\,dt = \underline{\underline{\pi e^{-|s|}\cos(s)}} \checkmark$$

Integral ist Quadrat unserer Funktion -> Satz von

Plancherel: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{f}(s)|^2ds$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}\frac{(t^2+2)^2}{(t^4+4)^2}\,dt = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\pi^2 e^{-2|s|}\cos^2(s)\,ds}_{\text{gerade Fkt!}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{2}\pi^{\cancel{2}}}{\cancel{2}\pi}\int_0^\infty e^{-2s}\frac{1}{2}(1+\cos(2s))\,ds = \pi\int_0^\infty\frac{e^{-2s}}{2}\,ds + \pi\underbrace{\int_0^\infty\frac{e^{-2s}\cos(2s)}{2}\,ds}_{\text{DAS wird part. Integriert!}}$$

$$= \pi\left[\frac{e^{-2s}}{-4}\right]_0^\infty + \frac{\pi}{2}\left(\frac{e^{-2s}\cos(2s)}{-2}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-2s}\sin(2s)\,ds\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\left(\frac{e^{-2s}\sin(2s)}{-2}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-2s}\cos(2s)\,ds\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-2s}\cos(2s)\,ds\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} = \underline{\underline{\frac{3\pi}{8}}}$$

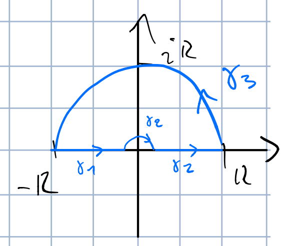
Aufpassen mit der part. Integration -> lieber ganz aufspalten.

(13.3f) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}\,dx.$$

$$\frac{\sin(z)}{z(z^2+1)} = \operatorname{Im}\left(\overbrace{\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}}^{f(z)}\right)$$

$\gamma_R = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3 * \gamma_\varepsilon$



Berechnen Integral mittels Residuensatz über γ_R mit $\varepsilon \to 0$ & $R \to \infty$.

$\gamma_1(t) = -R + (R-\varepsilon)t,\ t \in [0,1],\ \gamma_3(t) = Re^{i\pi t},\ t \in [0,1]$

$\gamma_2(t) = \varepsilon + (R-\varepsilon)t,\ t \in [0,1],\ \gamma_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{-i\pi t},\ t \in [0,1]$

Nach Residuensatz gilt folglich:

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz + \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im}(z_i)>0} \operatorname{Res}(f(z)|z_i)$$

Residuen: $z_1 = 0,\ z_2 = i,\ z_3 = -i$ Pole 1. Ordn

Uns wird z_1 & z_2 interessieren:

$$\operatorname{Res}(f(z)|z_1) = \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{e^{iz_1}}{(z_1^2+1) + 2z_1^2} = \frac{1}{(0+1)+2\cdot 0} = \underline{1}$$

$$\operatorname{Res}(f(z)|z_2) = \frac{p(z_2)}{q'(z_2)} = \frac{e^{-1}}{(\cancel{-1+1}) - 2} = \underline{-\frac{1}{2e}}$$

Da z_1 ein Pol 1. Ordnung ist und sich eine Umgebung $U \subset \mathbb{C}$ um z_1 finden lässt, für welche gilt, dass $f: U\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph ist, dürfen wir einen in Übung 7.2 bewiesenen Satz benutzen, welcher besagt, dass:

Umlaufrichtung!

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\,dz = -\alpha \cdot i \operatorname{Res}(f(z)|0) = -\pi i \cdot 1 = \underline{-\pi i}$$

Z.z: $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_3} f(z)\,dz = 0$

$$\left|\lim_{R\to\infty} \int_0^1 \frac{e^{iRe^{\pi i t}} \cdot R\pi i e^{\pi i t}}{Re^{\pi i t}(R^2 e^{2\pi i t}+1)}\,dt\right| \leq \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \left|\frac{R\pi i e^{\pi i t}\, e^{iR\cos\pi t}\, e^{\overbrace{-R\sin\pi t}^{>0 \text{ für } t\in[0,1]}}}{Re^{\pi i t}(R^2 e^{2\pi i t}+1)}\right| dt$$

$$\leq \int_0^1 \lim_{R\to\infty} \frac{R\pi}{R(R^2-1)}\,dt = \int_0^1 0\,dt = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + 0 - \pi i$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \pi i = 2\pi i\left(-\frac{1}{2e}\right) + \pi i = -\frac{\pi i}{e} + \pi i$$

Da $\lim_{R\to\infty}\left(\int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\,dz \quad = \underline{\pi i\left(1-\frac{1}{e}\right)}$

folgt nun direkt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x(x^2+1)}\,dx = \operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\,dz\right) = \operatorname{Im}\left(\pi i\left(1-\frac{1}{e}\right)\right)$$

$$= \underline{\underline{\pi\left(1-\frac{1}{e}\right)}}$$

(13.3g) Sei $\alpha > 0$. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$-u''(t) + \alpha^2 u(t) = h(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

wobei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine absolut integrierbare, stetige Funktion ist, mit Hilfe der Fouriertransformation.

Hinweis: Die Lösung kann in Abhängigkeit von h angegeben werden, wenn man den Faltungssatz verwendet.

Zuerst suchen wir eine partikuläre Lösung der DGL:

Wir wenden beidseitig die Fouriertransformation an:

$$[-u''(t)]^\wedge(s) + [\alpha^2 u(t)]^\wedge(s) = \hat{h}(s)$$

(benutzt: $\left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ (is)^n \hat{f}(s)$)

$$\Rightarrow \quad s^2 \hat{u}(s) + \alpha^2 \hat{u}(s) = \hat{h}(s)$$

$$(s^2+\alpha^2)\,\hat{u}(s) = \hat{h}(s)$$

$$\hat{u}(s) = \frac{\hat{h}(s)}{(s^2+\alpha^2)} \quad \Big| \text{ wählen } \hat{g}(s) := \frac{1}{s^2+\alpha^2}$$

Mithilfe der beiden Transformationsidentitäten

$f(t) * g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \hat{f}(s)\cdot\hat{g}(s)$ und $e^{-a|t|} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \dfrac{2a}{a^2+s^2}$

finden wir

$$\Rightarrow \quad u(t)_p = h(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau \quad \text{mit}$$

$$g(t) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha|t|} \quad \Rightarrow \quad \underline{u(t)_p = \frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|}\, h(t-\tau)\,d\tau}$$

Hom: $\quad -u''(t) + \alpha^2 u(t) = 0 \qquad$ Ansatz $u(t)_h = e^{\lambda t}$

$$-\lambda^2 + \alpha^2 = 0$$

$$\lambda = \pm\alpha \quad \Rightarrow \quad \underline{u(t)_h = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t}}$$

$$u(t) = u(t)_h + u(t)_p = C_1 e^{\alpha t} + C_2 e^{-\alpha t} + \frac{1}{2\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|}\, h(t-\tau)\,d\tau \quad ✓$$

(13.3h) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ y > 0,$$

mit Nebenbedingung $u(x,0) = h(x)$, wobei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine absolut integrierbare, stetige Funktion ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Fouriertransformation und den Faltungssatz. Beachten Sie bei der Lösung des Systems, dass die Fouriertransformation von $u(\cdot, y)$ beschränkt sein soll.

Entspricht fast der Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t)$$

Wenden beidseitig die Fouriertransformation bzgl. x an, mit

$f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ (is)^n \cdot \hat{f}(s)$:

$$-s^2\,\hat{u}(s,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{u}(s,y) = 0, \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{u}(s,y) - s^2\,\hat{u}(s,y) = 0$$

nur DGL nur bezüglich y $\rightarrow$ Euler-Ansatz: $\hat{u}(s,y) = e^{\lambda y}$

$\Rightarrow \lambda^2 - s^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm|s| \Rightarrow \hat{u}(s,y) = \underline{C_1(s)e^{|s|y} + C_2(s)e^{-|s|y}}$

⚠ Betragsstriche!

⚠ Abhängigkeit von s

$\rightsquigarrow$ Hinweis: $\hat{u}(s,y)$ soll beschränkt sein $\Rightarrow \underline{C_1(s) = 0}$

AWP:

$$u(x,0) = h(x) \xrightarrow{\mathcal{F}(.)} \hat{u}(s,0) = \hat{h}(s)$$

$$C_2(s)e^0 = \hat{h}(s) \Rightarrow \underline{C_2(s) = \hat{h}(s)}$$

$\Rightarrow \hat{u}_h(s,y) = \hat{h}(s)e^{-|s|y}$, $\hat{f}(s,y) := e^{-|s|y}$

Rücktransformation mit $(f(t)*h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \hat{f}(s)\cdot\hat{h}(s)$, $\frac{1}{t^2+1} \circ\!\!-\!\!\bullet \pi e^{-|s|}$

und $f(\alpha t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{|\alpha|}\hat{f}\left(\frac{s}{\alpha}\right)$, letzteres dürfen wir benutzen, da

$y > 0$ gilt ?):

$$u_h(x,y) = h(x) * f(x,y)$$

$$\hat{f}(s,y) = e^{-|s|y} \overset{y>0}{=} e^{-|s|\cdot|y|} = \frac{1}{|y|}\frac{1}{\pi}\left[\widehat{\frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1}}\right] \overset{y>0}{=} \underbrace{\frac{1}{y\pi}\left[\frac{y^2}{x^2+y^2}\right]}_{f(x)}$$

$$\Rightarrow \underline{f(x,y) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{y}{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow u_h(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\pi(\tau^2+y^2)}\cdot h(x-\tau)\,d\tau$$ ✓

(13.3i) Sei $\alpha > 0$. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \alpha^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x), \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$

mit Nebenbedingung $u(x,0) = h(x)$, wobei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine absolut integrierbare, stetige Funktion ist.

FT bezüglich x: (mit $f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet (is)^n\hat{f}(s)$))

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(s,t) + \alpha^2 s^2\hat{u}(s,t) = 0 \quad \text{DGL nur noch in } t$$

Lösen mittels Eulenansatz: $\hat{u}(s,t) = Ce^{\lambda t}$

$$\lambda + \alpha^2 s^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\alpha^2 s^2$$

$$\Rightarrow \hat{u}(s,t) = C_1(s) e^{-\alpha^2 s^2 t}$$

AWP: $u(x,0) = h(x) \xrightarrow{FT} \hat{u}(s,0) = \hat{h}(s)$

$$C_1(s) = \hat{h}(s)$$

$$\Rightarrow \hat{u}(s,t) = \hat{h}(s) \cdot e^{-\alpha^2 s^2 t}, \quad \hat{f}(s,t) := e^{-\alpha^2 s^2 t}$$

Rücktransformation mittels Faltungssatz: inverse FT

$$u(x,t) = h(x) * f(x,t) = h(x) * \left[e^{-\alpha^2 s^2 t} \right]^{\vee}(x,t)$$

$$f(x,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 s^2 t} e^{isx} \, ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx - \alpha^2 s^2 t}$$

müssen den Exponenten quadratisch ergänzen:

NR: $isx - \alpha^2 s^2 t = \alpha^2 t \left(\frac{ix}{\alpha^2 t} s - s^2 \right)$

$$= -\alpha^2 t \left(s^2 - \frac{ix}{\alpha^2 t} s \right) = -\alpha^2 t \left(s - \frac{ix}{2\alpha^2 t} \right)^2 - \frac{x^2}{4\alpha^2 t}$$

Hier müsste man korrekterweise über einen bestimmten Weg integrieren und zeigen, dass der Weg auf der reellen Achse gleich dem Weg oben ist

$$\Rightarrow f(x,t) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 t \left(s - \frac{ix}{2\alpha^2 t}\right)^2} ds = \left\{ \begin{array}{l} w = s - \frac{ix}{2\alpha^2 t} \\ dw = ds \end{array} \right\} = ⚠$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}} \int_{-\infty + \frac{ix}{2\alpha^2 t}}^{\infty + \frac{ix}{2\alpha^2 t}} e^{-\alpha^2 t w^2} dw = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha\sqrt{t} w)^2} dw = \left\{ \begin{array}{l} u = a\sqrt{t} w \\ du = a\sqrt{t} \, dw \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi a \sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du}_{(*)} = \underline{\frac{1}{2\sqrt{\pi t}\, a} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}}}$$

$$(*)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2 - v^2} du \, dv = \left\{ \begin{array}{l} u = r\cos\varphi \\ v = r\sin\varphi \end{array} \right\} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr$$

$$= 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} = \pi \Rightarrow (*) = \underline{\sqrt{\pi}}$$

Da der andere Weg "falsch" ist, hier noch die Alternative des Hauptassistenten:

$\left[e^{-\alpha^2 s^2 t}\right]^{\vee}(x,t)$:

$\left[e^{-\alpha^2 s^2 t}\right]' = -2s\alpha^2 t\, e^{-\alpha^2 s^2 t}$

DGL: $u' + 2\alpha^2 t s u = 0 \qquad u(0) = 1$

$-2s\alpha^2 t e^{-\alpha^2 s^2 t} + 2\alpha^2 t s e^{-\alpha^2 s^2 t} = 0$ ✓

$u(0) = e^{0} = 1$ ✓

DGL rücktransformieren:

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}\, a}\, e^{-\frac{\tau^2}{4a^2 t}} \cdot h(x-\tau)\, d\tau$$

(13.3j) Betrachten Sie ausserdem noch einmal die folgenden Aufgaben aus den Serien:

i. Aufgabe 10.1,

ii. Aufgabe 10.2,

iii. Aufgabe 11.1.

i) **Aufgabe 10.1 Einige Fourierintegrale**

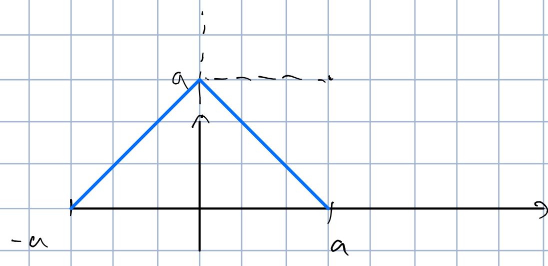
(10.1a) Berechnen Sie die Fouriertransformation in den folgenden zwei Fällen:

i. Sei $a > 0$ und

$$f(t) := \begin{cases} a - |t| & \text{für } |t| \le a, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ii. Sei $a > 0$ und

$$f(t) := \mathrm{e}^{-a|t|}.$$



i)

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} (a - |t|)\, e^{-ist}\, dt = \underbrace{\int_{-a}^{a} a e^{-ist}\, dt}_{1.} - \underbrace{\int_{-a}^{a} |t| e^{-ist}\, dt}_{2.}$$

$$1) \left[\frac{a}{-is} e^{-ist} \right]_{-a}^{a} = \frac{ai}{s} e^{-isa} - \frac{ai}{s} e^{isa} = \frac{2a}{s} \left(\frac{e^{isa} - e^{-isa}}{2i} \right) = \underline{\frac{2a}{s} \sin(sa)}$$

2) Nutzen die Symmetrieeigenschaften der FT aus und berechnen:

$$-\int_{-a}^{a} |t| e^{-ist}\, dt = -2\int_0^a t\cos(st)\, dt = -2\left(\frac{t}{s}\sin(st)\Big|_0^a - \int_0^a \frac{\sin(st)}{s}\, dt \right)$$

$$= -2\left(\frac{t}{s}\sin(sa) - \left[-\frac{\cos(st)}{s^2} \right]_0^a \right) = -\frac{2a}{s}\sin(sa) + 2\left(-\frac{\cos(sa)}{s^2} + \frac{1}{s^2} \right)$$

$$= \underline{-\frac{2a}{s}\sin(sa) - \frac{2}{s^2}\cos(sa) + \frac{2}{s^2}}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(s) = 1) + 2) = \frac{2a}{s}\sin(sa) - \frac{2a}{s}\sin(sa) + \frac{2}{s^2}(1 - \cos(sa))$$

$$= \underline{\underline{\frac{2}{s^2}(1 - \cos(sa))}} \quad \text{für } s \neq 0$$

$$s = 0: \quad \hat{f}(0) = \int_{-a}^{a} (a - |t|)\, dt = 2a^2 - 2\int_0^a t\, dt = 2a^2 - a^2 = \underline{\underline{a^2}}$$

Bemerkung: Wir wollen das Symmetrieargument aus obiger Aufgabe noch einmal genau aufschreiben. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} |t| \mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\,\mathrm{d}t &= \int_{0}^{a} |t|(\cos(st) + \mathrm{i}\sin(st))\,\mathrm{d}t + \int_{-a}^{0} |t|(\cos(st) + \mathrm{i}\sin(st))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{a} |t|(\cos(st) + \mathrm{i}\sin(st))\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} |t|(\cos(-st) + \mathrm{i}\sin(-st))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{a} |t|(\cos(st) + \mathrm{i}\sin(st))\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} |t|(\cos(st) - \mathrm{i}\sin(st))\,\mathrm{d}t \\
&= 2\int_{0}^{a} t\cos(st)\,\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

wobei wir in Schritt zwei die Substitution $t \to -t$ verwendet haben.

Dasselbe können wir auch für ungerade Fkt zeigen, und somit auf $\int_{-a}^{a} t e^{-ist}\,dt = -2\int_{0}^{a} t\sin(st)\,dt$ schliessen:

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} t e^{-ist}\,dt &= \int_{0}^{a} t(\cos(st) - i\sin(st))\,dt + \int_{-a}^{0} t(\cos(st) - i\sin(st))\,dt \\
&= \int_{0}^{a} t(\cos(st) - i\sin(st))\,dt + \int_{0}^{a} -t(\cos(-st) - i\sin(-st))\,dt \\
&= \int_{0}^{a} t(\cos(st) - i\sin(st))\,dt - \int_{0}^{a} t(\cos(st) + i\sin(st))\,dt \\
&= \underline{-2i\int_{0}^{a} t\sin(st)\,dt} = \underline{2i\,\mathrm{Im}\left(\int_{0}^{a} t e^{-ist}\,dt\right)}
\end{aligned}$$

ii) $f(t) := e^{-a|t|}$, $\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t| - ist} \, dt$

Selbes Symmetrieargument wie oben:

$$\hat{f}(s) = 2 \,\mathrm{Re} \int_{0}^{\infty} e^{-at-ist} \, dt = 2 \,\mathrm{Re} \int_{0}^{\infty} e^{-t(a+is)} \, dt$$

$$= 2 \,\mathrm{Re} \left[\frac{e^{\overset{\to 0}{-t(a+is)}}}{-a-is} \right]_0^{\infty} = 2 \,\mathrm{Re} \frac{1}{a+is} = 2 \,\mathrm{Re} \frac{a-is}{a^2+s^2}$$

(10.1b) Berechnen Sie die Fouriertransformation von

$$f(t) := e^{-\pi t^2}.$$

Benutzen Sie dazu den Satz von Cauchy und den Weg γ aus der Abbildung 10.1.

Hinweis: Sie müssen im Exponenten des Integranden quadratisch ergänzen.

$$= \underline{\underline{\frac{2a}{a^2+s^2}}}$$

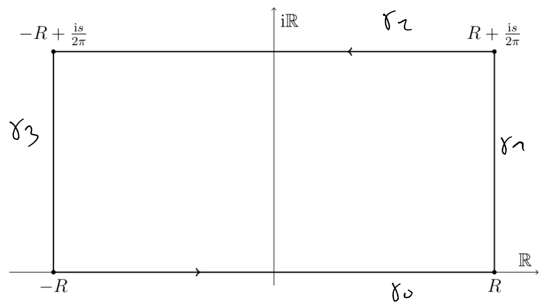


Abbildung 10.1: Der Weg γ.

$$\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2} e^{-ist} \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2 - ist} \, dt$$

Quadr. ergänzen:

NR: $-\pi t^2 - ist = -\pi \left(t^2 + \frac{is}{\pi} t \right)$

$$\hat{=} -\pi \left(\left(t + \frac{is}{2\pi} \right)^2 + \frac{s^2}{4\pi^2} \right) = \underline{-\pi \left(t + \frac{is}{2\pi} \right)^2 - \frac{s^2}{4\pi}}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(s) = e^{-\frac{s^2}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-\pi \left(t + \frac{is}{2\pi} \right)^2}}_{g(t)} \, dt$$

Betrachten S.v. Cauchy auf folgendem Weg $\gamma_R = \gamma_0 * \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3$

$\gamma_0(t) = -R + 2Rt, \ t \in [0,1]$ $\quad \gamma_1(t) = R + \frac{is}{2\pi} t, \ t \in [0,1]$

$\gamma_2(t) = R - 2Rt + \frac{is}{2\pi}, \ t \in [0,1]$ $\quad \gamma_3(t) = -R + \frac{is}{2\pi} - \frac{is}{2\pi} t, \ t \in [0,1]$

Nach S.v. Cauchy gilt, da keine Singularität in γ_R:

$$\int_{\gamma_R} g(t) \, dt = \int_{\gamma_0} g(t) \, dt + \int_{\gamma_1} g(t) \, dt + \int_{\gamma_2} g(t) \, dt + \int_{\gamma_3} g(t) \, dt = \underline{0}$$

Z.z.: $\lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_1} g(t) \, dt = \lim_{R \to \infty} \int_{\gamma_2} g(t) \, dt = 0$

$$\left| \lim_{R \to \infty} \int_0^1 e^{-\pi \left(R + \frac{is}{2\pi} t + \frac{is}{2\pi} \right)^2} \frac{is}{2\pi} \, dt \right| \leq \int_0^1 \lim_{R \to \infty} \left| \frac{e^{-\pi \left(R + \frac{is}{2\pi} (t+1) \right)^2} is}{2\pi} \right| dt$$

$$= \int_0^1 0 \, dt = \underline{0} \quad \rightarrow \text{ analog für } \gamma_3$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_0} g(z)\,dz = -\int_{\gamma_2} g(z)\,dz = \int_{-\gamma_2} g(z)\,dz$$

Mit $\lim\limits_{R\to\infty} \int_{\gamma_0} g(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\left(t+\frac{is}{2\pi}\right)^2} dt$ folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(z)\,dz = \lim_{R\to\infty} \int_{-\gamma_2} g(z)\,dz = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}\,dt}_{1)} = 1$$

$$1)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2 - \pi \tau^2}\,dt\,d\tau = \left\{ \begin{matrix} t = r\cos\varphi \\ \tau = r\sin\varphi \end{matrix} \right\} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-\pi r^2}\, r\,dr$$

$$= 2\pi \left[-\frac{1}{2\pi} e^{-\pi r^2} \right]_0^{\infty} = \underline{1}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(s) = e^{-\frac{s^2}{4\pi}} \cdot 1 = \underline{\underline{e^{-\frac{s^2}{4\pi}}}}$$

(10.1c) Berechnen Sie die Fouriertransformation von

$$f(t) := \mathrm{e}^{-\pi t^2}$$

erneut. Benutzen Sie diesesmal eine geeignete Substitution.

Von oben folgt $\hat{f}(s) = e^{-\frac{s^2}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi\left(t+\frac{is}{2\pi}\right)^2} dt = \left\{ \begin{matrix} \tau = t + \frac{is}{2\pi} \\ d\tau = dt \end{matrix} \right\}$

wie oben mit dem Weg gezeigt?

$$= e^{-\frac{s^2}{4\pi}} \int_{-\infty+\frac{is}{2\pi}}^{\infty+\frac{is}{2\pi}} e^{-\pi t^2}\,dt = e^{-\frac{s^2}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2}\,dt = \underline{\underline{e^{-\frac{s^2}{4\pi}}}}$$

ii)

Aufgabe 10.2 Die Wellengleichung

Die Wellengleichung ist eine partielle Differentialgleichung, welche die Ausbreitung einer Welle in einem Medium beschreibt. Sie ist gegeben durch

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t), \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{10.2.1}$$

wobei $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$. Typischerweise versehen wir die Wellengleichung mit Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{10.2.2}$$

Die Anfangsbedingungen (10.2.2) kodieren, dass u zur Zeit $t = 0$ die Form f hat und in Ruhe ist.

(10.2a) Zeigen Sie, dass eine Lösung u der Wellengleichung (10.2.1) mit Anfangsbedingungen (10.2.2) die Eigenschaft hat, dass ihre Fouriertransformation

$$\widehat{u}(\xi,t) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\xi}\,\mathrm{d}x, \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\widehat{u}(\xi,t) = -\xi^2\widehat{u}(\xi,t), \qquad \xi \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

mit Anfangsbedingungen

$$\widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t}\widehat{u}(x,0) = 0, \qquad \xi \in \mathbb{R},$$

erfüllt.

(10.2b) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe (10.2a), dass die Fouriertransformation von u gegeben ist durch

$$\widehat{u}(\xi,t) = \widehat{f}(\xi)\cos(\xi t), \qquad \xi \in \mathbb{R},\ t > 0.$$

(10.2c) Benutzen Sie die Eigenschaften der Fouriertransformation aus der Vorlesung zusammen mit einer Fouriertabelle, um zu schliessen, dass

$$u(x,t) = (f * \Gamma_t)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\Gamma_t(x-y)\,\mathrm{d}y, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{10.2.3}$$

wobei

$$\Gamma_t(x) = \frac{\delta(x-t) + \delta(x+t)}{2}.$$

Hinweis: δ beschreibt die Delta Distribution, welche durch die Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(y)\,\mathrm{d}y = f(0)$$

definiert ist.

a) FT in x beidseitig mit $f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, (is)^n \hat{f}(s)$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u}(s,t) = -s^2\hat{u}(s,t)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2}\hat{u}(s,t) + s^2\hat{u}(s,t) = 0$$

AWP: $u(x,0) = f(x) \xrightarrow{FT} \hat{u}(s,0) = \hat{f}(s)$

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,0) = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(s,0) = 0$$

b) Wir haben nun eine DGL in t → Euler Ansatz

$$\hat{u}(s,t) = c_1 e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + s^2 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i|s|$$

$$\Rightarrow \hat{u}(s,t) = C_1(s) e^{i|s|t} + C_2(s) e^{-i|s|t}$$

Reelle Lösungen: $\hat{u}(s,t) = C_3(s)\cos(st) + C_4(s)\sin(st)$

AWP: $\hat{u}(s,0) = C_3(s) = \hat{f}(s)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}(s,0) = -C_3(s)\cdot s\sin(st) + C_4(s)\cdot s\cdot\cos(st)\Big|_{t=0}$$

$$= C_4(s)\cdot s = 0 \quad \Rightarrow C_4(s) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\hat{u}(s,t) = \hat{f}(s)\cos(st)}} \qquad \hat{g}(s,t) = \cos(st)$$

c) Rücktransformation mittels Faltungssatz und Fouriertabelle:

$$\underline{\underline{u(x,t) = f(x) * g(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cdot g(x-\tau,t)\,d\tau}}$$

$$g(x,t) = \left[\frac{e^{i|s|t} + e^{-i|s|t}}{2}\right]^{\vee}(x,t) = \frac{1}{2}\left[\delta(x-t) + \delta(x+t)\right]$$

Tabelle $\delta(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet\; e^{-ist_0}$

iii) **Aufgabe 11.1 Eine Anwendung des Satzes von Plancherel**

(11.1a) Betrachten Sie die Funktion

$$f(t) := \begin{cases} 1-t^2 & \text{wenn } t \in [-1,1], \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

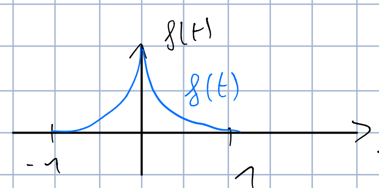
und berechnen Sie ihre Fouriertransformation.

(11.1b) Berechnen Sie mit Hilfe von Aufgabe (11.1a) den Wert des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{(\sin(s) - s\cos(s))^2}{s^6}\,\mathrm{d}s.$$

(11.1c) [*Bonus*] Können Sie ein anderes Integral auf diese Art und Weise berechnen?

Hinweis: Achtung! Beim Kreieren von eigenen Beispielen muss man immer darauf achten, dass die Integrale auch wirklich konvergieren.



$$\hat{f}(s) = \int_{-1}^{1} (1-t^2) e^{-ist}\,dt$$

$$= \int_{-1}^{1} e^{-ist}\,dt - \int_{-1}^{1} t^2 e^{-ist}\,dt = \left[\frac{e^{-ist}}{-is}\right]_{-1}^{1} - 2\int_0^1 t^2\cos(st)\,dt$$

Symmetrieargument

$$= \frac{ie^{-is}}{s} - \frac{ie^{is}}{s} - 2\left(\frac{t^2 \sin(st)}{s}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2t\sin(st)}{s}\,dt \right)$$

$$= \frac{2}{s}\cancel{\sin(s)} - \cancel{\frac{2}{s}}\sin(s) + \frac{2}{s}\left(\frac{-2t\cos(st)}{s}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{2\cos(st)}{s}\,dt \right)$$

$$= -\frac{4}{s^2}\cos(s) + \frac{2}{s^2}\left[\frac{2}{s}\sin(st) \right]_0^1 = -\frac{4}{s^2}\cos(s) + \frac{4}{s^3}\sin(s)$$

$$= \underline{\underline{\frac{4\,(\sin(s) - s\cos(s))}{s^3}}}$$

b) Quadriertes Integral -> Plancherel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(s)|^2\,ds$$

Wollen berechnen: $\int_0^\infty \frac{(\sin(s) - s\cos(s))^2}{s^6}\,ds$ => gerade Fkt!

$$\Rightarrow \int_0^\infty (-\text{''}-)\,ds = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} (-\text{''}-)\,ds = \frac{1}{32}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)^2\,ds = \frac{\pi}{16}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(s)^2\,ds \right)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty (-\text{''}-)\,ds = \frac{\pi}{16}\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{\pi}{16}\int_{-\infty}^{\infty} (1-t^2)^2\,dt$$

$$= \frac{\pi}{16}\int_{-1}^{1} (1 - 2t^2 + t^4)\,dt = \frac{\pi}{8}\left[t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{8}\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = \frac{\pi}{8}\,\frac{8}{15} = \underline{\underline{\frac{\pi}{15}}}$$

i. Aufgabe 10.1,
ii. Aufgabe 10.2,
iii. Aufgabe 11.1.

Aufgabe 13.4 Verschiedene Aufgaben zur Laplacetransformation

(13.4a) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mittels der Laplacetransformation

$$y' - y = \mathrm{e}^{3t}, \qquad y(0) = 1.$$

(13.4b) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mittels der Laplacetransformation

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1.$$

(13.4c) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mittels der Laplacetransformation

$$y'' + 4y = \sin t, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

(13.4d) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mittels der Laplacetransformation

$$y'' - 2y' + 2y = 2\mathrm{e}^{t}, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1.$$

(13.4e) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mittels der Laplacetransformation

$$y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{t}, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

(13.4f) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mittels der Laplacetransformation

$$y'' + 2y' + 2y = h(t), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1,$$

wobei

$$h(t) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } t \in [\pi, 2\pi], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(13.4g) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mittels der Laplacetransformation

$$y'' - 3y' + 2y = tu(t), \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0,$$

wobei

$$u(t) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } t > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(13.4h) Sei $\alpha > 0$. Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + \alpha^2 y = h, \qquad y(0) = y'(0) = 0,$$

wobei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige Funktion ist deren Laplacetransformation $\mathcal{L}[h]$ existiert.
Hinweis: Benutzen Sie den Faltungssatz.

(13.4i) Betrachten Sie ausserdem die folgenden Aufgaben aus den Serien:

Aufgabe 13.4 Verschiedene Aufgaben zur Laplacetransformation

(13.4a) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mittels der Laplacetransformation

$$y' - y = e^{3t}, \qquad y(0) = 1.$$

Wir transformieren beidseitig mit Laplace mittels

$f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ sF(s) - f(0^+)$, $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s)$, $e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s-a}$ mit $s > a$

(Die letzte Bedingung kommt aus der Notwendigen Abschätzung, dass $f(x) < Ce^{\sigma t}$ sein muss, mit $s = \sigma + i\omega$)

$$\Rightarrow \quad sY(s) - y(0^+) - Y(s) = \frac{1}{s-3}$$

$$Y(s)(s-1) - 1 = \frac{1}{s-3}$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{(s-3)(s-1)}}_{\text{PBZ}} + \frac{1}{s-1} = \frac{1}{2(s-3)} - \frac{1}{2(s-1)} + \frac{1}{s-1}$$

$$= \frac{1}{2(s-3)} + \frac{1}{2(s-1)}$$

PBZ: $\frac{A}{s-3} + \frac{B}{s-1} = \frac{1}{2(s-3)} - \frac{1}{2(s-1)}$

$s = 3$: $\quad 2A \overset{!}{=} 1 \quad A = \frac{1}{2}$

$s = 1$: $\quad -2B = 1 \quad B = -\frac{1}{2}$

Rücktransformation mit $\mathcal{L}^{-1}\{\ldots\}$; $e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s-a}$

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{t} \quad ✓$$

(13.4b) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mittels der Laplacetransformation

$$y'' - 3y' + 2y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1.$$

$$\mathcal{L}\left(y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = 0\right) = \left\{\begin{array}{ll} f''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet & s^2F(s) - sf(0^+) - f'(0^+) \\ f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet & sF(s) - f(0^+) \\ f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet & F(s) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad s^2F(s) - s - 1 - 3sF(s) + 3 + 2F(s) = 0$$

$$F(s)(s^2 - 3s + 2) = s - 2$$

$$F(s) = \frac{\cancel{(s-2)}}{\cancel{(s-2)}(s-1)} = \frac{1}{(s-1)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} = \left\{ e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a} \right\} = \underline{\underline{e^{t}}} = y(t)$$

(13.4c) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mittels der Laplacetransformation

$$y'' + 4y = \sin t, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

$$\mathcal{L}\{y''(t) + 4y(t) = \sin t\} = \left\{ \begin{array}{l} y''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s^2F(s) - s f(0^+) - f'(0^+) \\ y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s) \\ \sin at \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{a}{s^2+a^2} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow s^2F(s) - s + 4F(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$F(s)(s^2+4) = \frac{1}{s^2+1} + s$$

$$F(s) = \underbrace{\frac{1}{(s^2+4)(s^2+1)}}_{PBZ} + \underbrace{\frac{s}{s^2+4}}_{\mathcal{L}\{\cos(2t)\}}$$

$$\frac{As+B}{(s^2+4)} + \frac{Cs+D}{(s^2+1)} = \frac{1}{3(s^2+1)} - \frac{1}{3(s^2+4)}$$

$$\left.\begin{array}{ll} s = 2i: & (2iA + B)(-3) = 1 \\ & -6iA - 3B = 1 \\ s = -2i: & (-2iA + B)(-3) = 1 \\ & 6iA - 3B = 1 \end{array}\right\} \quad A = 0, \quad B = -\frac{1}{3}$$

$$\left.\begin{array}{ll} s = i: & (Ci + D)\,3 = 3iC + 3D = 1 \\ s = -i: & (-iC + D)\,3 = -3iC + 3D = 1 \end{array}\right\} \quad C = 0, \quad D = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{1}{3}\frac{1}{(s^2+1)} - \frac{1}{3}\frac{1}{s^2+4} + \frac{s}{s^2+4} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \sin(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{a}{s^2+a^2} \\ \cos(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+a^2} \end{array} \right\}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{3}\sin(t) - \frac{1}{6}\sin(2t) + \cos(2t)}}$$

(13.4d) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mittels der Laplacetransformation

$$y'' - 2y' + 2y = 2e^t, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1.$$

$$\mathcal{L}\{y'' - 2y' + 2y = 2e^t\} = \left\{ \begin{array}{l} y''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ s^2 F(s) - s f(0^+) - f'(0^+) \\ y'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ s F(s) - f(0^+) \\ y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s) \\ e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s-a} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow s^2 Y(s) - 1 - 2sY(s) + 2Y(s) = 2 \cdot \frac{1}{s-1}$$

$$Y(s)(s^2 - 2s + 2) = \frac{2}{s-1} + 1$$

$$Y(s) = \frac{2}{(s-1)(s^2-2s+2)} + \frac{1}{(s^2-2s+2)}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \underbrace{\frac{2}{(s-1)((s-1)^2+1)}}_{PBZ} + \underbrace{\frac{1}{(s-1)^2+1}}_{\mathcal{L}\{e^t \sin t\}} = \underline{\frac{2}{s-1} + \frac{-2(s-1)}{(s-1)^2+1} + \frac{1}{(s-1)^2+1}}$$

$$PBZ: \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{((s-1)^2+1)} = \frac{2}{s-1} + \frac{-2s+2}{(s-1)^2+1}$$

$s = 1$; $A = 2$ $\quad A = 2$

s^2 ; $s^2 A + Bs^2 = 0$ $\quad B = -A = \underline{-2}$

s^0 ; $2A - C = 2$ $\quad \underline{C} = 2$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \left\{ \begin{array}{l} e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s-a} \\ e^{at}\sin(bt) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{b}{(s-a)^2+b^2} \\ e^{at}\cos(bt) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} \end{array} \right\} = \underline{\underline{2e^t - 2e^t\cos(t) + e^t \sin(t)}} \checkmark$$

(13.4e) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mittels der Laplacetransformation

$$y'' - 2y' + y = e^t, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

$$\mathcal{L}(y'' - 2y' + y = e^t) = \left\{ \begin{array}{l} y''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ s^2 Y(s) - s y(0^+) - y'(0^+) \\ y'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ s Y(s) - y(0^+) \\ y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(s) \\ e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s-a} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow s^2 Y(s) - s - 2sY(s) + 2 + Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$Y(s)(s^2 - 2s + 1) = \frac{1}{s-1} + s - 2$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{(s-1)^3}}_{\mathcal{L}\{\frac{1}{2}t^2e^t\}} + \frac{s}{(s-1)^2} - \frac{2}{(s-1)^2}$$

$$= \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{\cancel{s-1}\,1}{(s-1)^{\cancel{2}}} - \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \left\{\begin{array}{lll} t^n e^{at} & \circ\!\!-\!\!\bullet & \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \\ e^{at} & \circ\!\!-\!\!\bullet & \frac{1}{s-a} \end{array}\right\} = \underline{\underline{\frac{1}{2}t^2e^t - te^t + e^t}} \checkmark$$

(13.4f) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mittels der Laplacetransformation

$$y'' + 2y' + 2y = h(t), \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1,$$

wobei

$$h(t) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } t \in [\pi, 2\pi], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{y'' + 2y' + 2y\} = \left\{\begin{array}{lll} y''(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & s^2F(s) - s\,f(0^+) - f'(0^+) \\ y'(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & sF(s) - f(0^+) \\ y(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & F(s) \end{array}\right\} = s^2F(s) - 1 + 2sF(s) + 2F(s)$$

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \int_\pi^{2\pi} 1 \cdot e^{-st}\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_\pi^{2\pi} = -\frac{e^{-2\pi s}}{s} + \frac{e^{-\pi s}}{s}$$

$$\Rightarrow \quad F(s)(s^2+2s+2) = \frac{e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-2\pi s}}{s} + 1$$

$$F(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s((s+1)^2+1)} - \frac{e^{-2\pi s}}{s((s+1)^2+1)} + \underbrace{\frac{1}{(s+1)^2+1}}_{\mathcal{L}\{e^{-t}\sin t\}}$$

$$= e^{-\pi s}\underbrace{\frac{1}{s}\frac{1}{(s+1)^2+1}}_{\text{PBZ}} - e^{-2\pi s}\underbrace{\frac{1}{s}\frac{1}{(s+1)^2+1}}_{\text{PBZ}} + \frac{1}{(s+1)^2+1}$$

$$\text{PBZ:} \quad \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{(s+1)^2+1} = \frac{1}{2s} - \frac{s+2}{2((s+1)^2+1)} = \frac{1}{2s} - \frac{s+1}{2((s+1)^2+1)} - \frac{1}{2((s+1)^2+1)}$$

$s = 0: \quad 2A = 1 \qquad A = \frac{1}{2}$

$s^2: \quad A + B = 0 \qquad B = -A = -\frac{1}{2}$

$s^1: \quad 2A + C = 0 \qquad C = -1$

$$\Rightarrow F(s) = e^{-\pi s}\left(\frac{1}{2s} - \frac{s+1+1}{2((s+1)^2+1)}\right) - e^{-2\pi s}\left(\frac{1}{2s} - \frac{s+1+1}{2((s+1)^2+1)}\right) + \frac{1}{(s+1)^2+1}$$

Rücktransformation mit $\mathcal{L}^{-1}$: $e^{at}\sin(bt) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$, $f(t-c)h(t-c) \circ\!\!-\!\!\bullet e^{-cs}F(s) \quad s>0$

$1 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}$, $e^{at}\cos(bt) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = h(t-\pi)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-(t-\pi)}\cos(t-\pi) - \frac{1}{2}e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)\right) -$$
$$h(t-2\pi)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-(t-2\pi)}\cos(t-2\pi) - \frac{1}{2}e^{-(t-2\pi)}\sin(t-2\pi)\right) + e^{-t}\sin(t)$$

mit $h(t-c) = \begin{cases} 1 & t \geq c \\ 0 & t < c \end{cases}$ Heaviside Fkt.

(13.4g) Lösen Sie die folgende Differentialgleichung mittels der Laplacetransformation

$$y'' - 3y' + 2y = tu(t), \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0,$$

wobei

$$u(t) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } t > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{y'' - 3y' + 2y = t\,u(t)\} = \left\{\begin{array}{l} y''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ s^2F(s) - sf(0^+) - f'(0^+) \\ y'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ sF(s) - f(0^+) \\ y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ F(s) \\ f(t-c)h(t-c) \circ\!\!-\!\!\bullet\ e^{-cs}F(s) \quad s>0 \\ t \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s^2} \end{array}\right\}$$

Lösung von diesem Teil muss mit Heaviside multipliziert werden.

$$\Rightarrow s^2F(s) - s - 3sF(s) + 3 + 2F(s) = \frac{1}{s^2} \qquad s > 0$$

$$F(s)(s^2 - 3s + 2) = \left(\frac{1}{s^2}\right) + s - 3$$

$$F(s) = \underbrace{\left(\frac{1}{s^2(s-2)(s-1)}\right)}_{\text{PBZ2}} + \underbrace{\frac{s}{(s-2)(s-1)} - \frac{3}{(s-2)(s-1)}}_{\text{PBZ1}}$$

PBZ1: $\frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} = \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s-2}$

$s=2: \quad A = -1$

$s=1: \quad -B = -2$

$B = 2$

PBZ 2: $\dfrac{A_1}{s} + \dfrac{A_2}{s^2} + \dfrac{B}{s-2} + \dfrac{C}{s-1} = \dfrac{3}{4s} + \dfrac{1}{2s^2} + \dfrac{1}{4(s-2)} - \dfrac{1}{s-1}$

$s=0: \quad 2A_2 = 1 \quad A_2 = \frac{1}{2} \qquad s=1: \quad -C = 1 \quad C = -1$

$s=2: \quad 4B = 1 \quad B = \frac{1}{4} \qquad s^3: \quad A_1 + B + C = 0 \quad A_1 = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow F(s) = \left(\frac{3}{4s} + \frac{1}{2s^2} + \frac{1}{4(s-2)} - \frac{1}{s-1}\right) + \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s-2}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \left\{\begin{array}{l} 1 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s} \\ t^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}} \\ e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a} \end{array}\right\} = u(t)\left(\frac{3}{4} + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}e^{2t} - e^{t}\right) + 2e^{t} - e^{2t}$$

(13.4h) Sei $\alpha > 0$. Finden Sie eine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + \alpha^2 y = h, \qquad y(0) = y'(0) = 0,$$

wobei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stückweise stetige Funktion ist deren Laplacetransformation $\mathcal{L}[h]$ existiert.

Hinweis: Benutzen Sie den Faltungssatz.

$$\mathcal{L}\{y'' + \alpha^2 y = h\} = \left\{\begin{array}{l} y''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s^2 Y(s) - s\,y(0^+) - y'(0^+) \\ y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet Y(s) \\ h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet H(s) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow s^2 Y(s) + \alpha^2 Y(s) = H(s)$$

$$Y(s)(s^2+\alpha^2) = H(s)$$

$$Y(s) = H(s) \cdot \frac{1}{s^2+\alpha^2} \qquad G(s) := \frac{1}{s^2+\alpha^2}$$

Rücktransformation mittels Faltungssatz:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \left\{\begin{array}{l} h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet H(s) \\ \sin(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{a}{s^2+a^2} \\ h(t) * g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet H(s)\cdot G(s) \end{array}\right\} = h(t) * g(t) = \int_0^t h(t-\tau)\frac{1}{\alpha}\sin(\alpha\tau)\,d\tau$$

(13.4i) Betrachten Sie ausserdem die folgenden Aufgaben aus den Serien:

i. Aufgabe 12.2, ii. Aufgabe 12.4.

Aufgabe 12.2 Laplacerücktransformation und Faltung

(12.2a) Bestimmen Sie die Originalfunktionen der folgenden Laplacetransformierten

$$f(s) = \frac{1}{s^2(s^2+a^2)}.$$

Benutzen Sie dazu eine Partialbruchzerlegung.

(12.2b) Bestimmen Sie erneut die Originalfunktionen der folgenden Laplacetransformierten

$$f(s) = \frac{1}{s^2(s^2+a^2)}.$$

Benutzen Sie diesesmal den Faltungssatz aus der Vorlesung.

(12.2c) Bestimmen Sie die Originalfunktionen der folgenden Laplacetransformierten

$$f(s) = \frac{-2s^2+18s-3}{s^3-s^2-8s+12}$$

durch eine Methode Ihrer Wahl.

a) PBZ: $\frac{As+B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+a^2} = \frac{1}{s^2a^2} - \frac{1}{a^2(s^2+a^2)}$

$s=0$: $a^2B = 1 \quad B = \frac{1}{a^2}$

$s=ia$: $-a^2(iaC+D) = 1$

$s=-ia$: $-a^2(-iaC+D) = 1$

$\Big\}\ C=0,\quad D=-\frac{1}{a^2}$

$s^3 =$ $A + C = 0 \Rightarrow A=0$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = \left\{\begin{array}{l} t^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}} \\ \sin(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{a}{s^2+a^2}\end{array}\right\} = \underline{\underline{\frac{1}{a^2}t - \frac{1}{a^3}\sin(at)}}$$

b) $f(s) = \frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{(s^2+a^2)}$

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = \left\{\begin{array}{l} t^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}} \\ \sin(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{a}{s^2+a^2} \\ f(t)*g(t) \circ\!\!-\!\!\bullet F(s)\cdot G(s)\end{array}\right\} = \int_0^t (t-\tau)\frac{1}{a}\sin(a\tau)\,d\tau$$

Faltungssatz

$$= \int_0^t \frac{t}{a}\sin(a\tau)\,d\tau - \int_0^t \frac{\tau}{a}\sin(a\tau)\,d\tau = -\frac{t\cos(a\tau)}{a^2}\Big|_0^t - \left(-\frac{\tau\cos(a\tau)}{a^2}\Big|_0^t + \int_0^t \frac{\cos(a\tau)}{a^2}\,d\tau\right)$$

$$= \cancel{\frac{-t\cos(at)}{a^2}} + \frac{t}{a^2} + \cancel{\frac{t\cos(at)}{a^2}} + \left[-\frac{\sin(a\tau)}{a^3}\right]_0^t = \underline{\underline{\frac{t}{a^2} - \frac{\sin(at)}{a^3}}}$$

c)
$$f(s) = \frac{-2s^2+18s-3}{s^3-s^2-8s+12} = \frac{-2\left(s^2-9s+\frac{3}{2}\right)}{(s-2)(s^2+s-6)} = \frac{-2\left(s^2-9s+\frac{3}{2}\right)}{(s-2)(s+3)(s-2)}$$

PBZ:
$$\frac{A_1}{s-2} + \frac{A_2}{(s-2)^2} + \frac{B}{(s+3)} = \frac{1}{s-2} + \frac{5}{(s-2)^2} - \frac{3}{(s+3)}$$

$s=2$: $\quad 5A_2 = 25 \quad A_2 = 5$

$s=-3$: $\quad 25B = -75 \quad B = -3$

s^2: $\quad A_1 + B = -2 \quad A_1 = 1$

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = \left\{ \begin{array}{l} e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a} \\ t^n e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \end{array} \right\} = \underline{\underline{e^{2t} - 3e^{-3t} + 5te^{2t}}}$$

Aufgabe 13.5 Weitere Aufgaben

(13.5a) Weitere gute Übungsaufgaben aus den Serien sind:

i. Aufgabe 3.5,

ii. Aufgabe 5.1,

iii. Aufgabe 5.2,

iv. Aufgabe 6.1,

v. Aufgabe 6.3,

vi. Aufgabe 6.4.

$u_x(x,y) \overset{!}{=} v_y(x,y)$ & $u_y(x,y) \overset{!}{=} -v_x(x,y)$

i)

Aufgabe 3.5 Die Cauchy–Riemann Gleichungen

Wir benutzen die Notation
$$f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y), \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Welche der im Folgenden definierten Funktionen sind holomorph?

(3.5a) $u(x,y) := x^4 - 6x^2y^2 + y^4$, $v(x,y) := 4x^3y - 4xy^3$.

(3.5b) $u(x,y) := x^3 - 3xy^2$, $v(x,y) := -3x^2y + y^3$.

(3.5c) $u(x,y) := \sin(x^2-y^2)\cosh(2xy)$, $v(x,y) := -\cos(x^2-y^2)\sinh(2xy)$.

(3.5d) $u(x,y) := \mathrm{e}^{x^2-y^2}\cos(2xy)$, $v(x,y) := \mathrm{e}^{x^2-y^2}\sin(2xy)$.

Hinweis: Der Kosinus Hyperbolicus und der Sinus Hyperbolicus sind gegeben durch
$$\cosh(z) := \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}, \qquad \sinh(z) := \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}.$$

a) $u_x(x,y) = 4x^3 - 12xy^2$

$u_y(x,y) = -12x^2y + 4y^3$

$v_x(x,y) = 12x^2y - 4y^3$

$v_y(x,y) = 4x^3 - 12xy^2$

$\rightsquigarrow$ CR erfüllt $\Rightarrow$ holomorph

b) $u_x(x,y) = 3x^2 - 3y^2$

$u_y(x,y) = -6xy$

$v_x(x,y) = -6xy$

$v_y(x,y) = -3x^2 + 3y^2$

$\rightsquigarrow$ CR nicht erfüllt

$\Rightarrow$ nicht holomorph

d) $u_x(x,y) = 2xe^{x^2-y^2}\cos(2xy) - e^{x^2-y^2}\cdot 2y\sin(2xy)$

$v_y(x,y) = -2ye^{x^2-y^2}\sin(2xy) + e^{x^2-y^2}2x\cos(2xy)$

$u_y(x,y) = -2ye^{x^2-y^2}\cos(2xy) - 2xe^{x^2-y^2}\sin(2xy)$

$v_x(x,y) = 2xe^{x^2-y^2}\sin(2xy) + 2ye^{x^2-y^2}\cos(2xy)$

$\rightsquigarrow$ erfüllt CR $\Rightarrow$ holomorph

c) $u_x(x,y) = \cos(x^2-y^2)2x\cosh(2xy) + \sin(x^2-y^2)\sinh(2xy)2y$

$u_y(x,y) = -\cos(x^2-y^2)2y\cosh(2xy) + \sin(x^2-y^2)\sinh(2xy)2x$

$v_x(x,y) = \sin(x^2-y^2)2x\sinh(2xy)$ $\rightsquigarrow$ CR nicht erfüllt

$v_y(x,y) =$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{nicht}}}$ holomorph

ii)

Aufgabe 5.1 Anwendung des Satzes von Cauchy – I

Sei γ die Parametrisierung entgegen des Uhrzeigersinns des Quadrates Q_2 mit Mittelpunkt 0 und Seitenlänge 4. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

i) $\int_\gamma \frac{e^{-z}}{z-(\pi i/2)}\,dz$,

ii) $\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z(z^2+8)}\,dz$,

iii) $\int_\gamma \frac{z}{2z+1}\,dz$,

iv) $\int_\gamma \frac{\cosh(z)}{z^4}\,dz$.

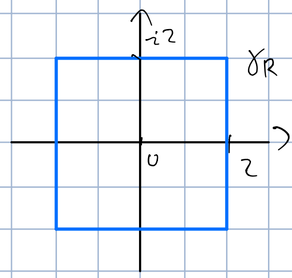
Hinweis: Der Kosinus hyperbolicus cosh ist definiert durch

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Beim Lösen von Aufgabe iv) werden Sie ausserdem noch dem Sinus hyperbolicus sinh begegnen, welcher durch

$$\sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

definiert ist.



i) Wenden den Residuensatz auf γ_R an:

Residuen: $z_1 = \frac{\pi i}{2}$, Pol 1. Ordn., im Weg

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f(z)|z_1) = \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{e^{-z_1}}{1} = e^{-\frac{\pi i}{2}} = \underline{-i}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z)|z_1) = \underline{\underline{2\pi}}$$

ii) Residuen: $z_1 = 0$, Pol 1. Ordn., $z_{2,3} = \pm 2\sqrt{2}i$ $\to$ nicht im Weg?

$$\operatorname{Res}(f(z)|z_1) = \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{\cos(z_1)}{(z_1^2+8)+2z_1^2} = \underline{\frac{1}{8}}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z)|z_1) = \underline{\underline{\frac{\pi i}{4}}}$$

iii) Residuen: $z_1 = -\frac{1}{2}$, Pol 1. Ordn im Weg

$$\operatorname{Res}(f(z)|z_1) = \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{z_1}{2} = -\underline{\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f(z)|z_1) = \underline{\underline{-\frac{\pi i}{2}}}$$

iv) Residuen: $z_1 = 0$, Pol 4. Ordn.

$$\text{Res}(f(z)|z_1) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{6} \frac{d^3}{dz^3} \left[\cancel{z^4} \frac{\cosh(z)}{\cancel{z^4}} \right]$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1}{6} \sinh(z) = \underline{0}$$ ✓

iii) **Aufgabe 5.2 Anwendung des Satzes von Cauchy – II**

Sei γ eine geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$ mit positiver Umlaufrichtung – das bedeutet, dass wenn wir entlang γ laufen, das von der Kurve eingeschlossene Gebiet G immer zu unserer Linken liegt. Wir betrachten

$$g(z) := \int_\gamma \frac{s^3 + 2s}{(s-z)^3} \, \mathrm{d}s.$$

Zeigen Sie, dass $g(z) = 6\pi\mathrm{i}z$, wenn z innerhalb von G liegt, und $g(z) = 0$, wenn z ausserhalb von G liegt.

Letzteres folgt aus dem Satz von Cauchy, da $f(s)$ dann holomorph auf dem geschlossenen Gebiet ist.

Residuensatz: $$\int_\gamma \underbrace{\frac{s^3+2s}{(s-z)^3}}_{f(z)} ds = 2\pi i \, \text{Res}(f(s)|s_1)$$

Residuen: $s_1 = z$, Pol 3. Ordn.

$$\text{Res}(f(s)|s_1) = \lim_{s\to z} \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left[\cancel{(s-z)^3} \frac{s^3+2s}{\cancel{(s-z)^3}} \right]$$

$$= \lim_{s\to z} \frac{1}{2} \, 6s = \underline{3z}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot 3z = \underline{\underline{6\pi i z}}$$ ✓

iv) **Aufgabe 6.1 Der Konvergenzradius der Taylorreihe**

(6.1a) Berechnen Sie die ersten drei Koeffizienten der Taylorentwicklung von

$$f(z) := \frac{\mathrm{e}^z}{(z-3)(z-2\mathrm{i})(z^2+2\mathrm{i})}$$

um $z_0 = 0$.

(6.1b) Was ist der Konvergenzradius der Taylorentwicklung um $z_0 = 0$ von f?

Finden wir über die Potenzreihenentwicklung der einzelnen Glieder:

$$e^z := 1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots \qquad \rho = \infty$$

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^k \qquad \rho = 3$$

$$\frac{1}{z-2i} = \frac{i}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2i}} = \frac{i}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2i}\right)^k \qquad \rho = 2$$

$$\frac{1}{z^2+2i} = \frac{1}{2i}\,\frac{1}{1-\frac{iz^2}{2}} = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{i}\,z}{\sqrt{2}}\right)^{2k} \qquad \rho = \sqrt{2}$$

b) $\Rightarrow$ kleinste Konvergenzradius der Reihen ist $\underline{\underline{\sqrt{2}}}$

a) $$\frac{e^z}{(z-3)(z-2i)(z^2+2i)} = e^z\cdot\frac{1}{(z-3)}\cdot\frac{1}{(z-2i)}\cdot\frac{1}{(z^2+2i)}$$

Brauchen nur 3 Koeffizienten:

$$\left(1+z+\frac{z^2}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}-\frac{z}{9}-\frac{z^2}{27}\right)\cdot\left(\frac{i}{2}+\frac{z}{4}-\frac{z^2 i}{8}\right)\cdot\left(\frac{1}{2i}+\frac{z^2}{4}\right)$$

$$= -\frac{1}{12} + z\left(-\frac{1}{24i}-\frac{1}{36}-\frac{1}{12}\right) + z^2\left(-\frac{i}{24}+\cancel{\frac{1}{48}}-\cancel{\frac{1}{108}}-\cancel{\frac{1}{24}}-\frac{1}{72i}-\frac{1}{24i}-\cancel{\frac{1}{36}}\right)$$

$$= -\frac{1}{12} + z\left(-\frac{1}{9}-\frac{1}{24i}\right) + z^2\left(-\frac{25}{432}-\frac{1}{72i}\right)$$

✓ ✓ ✓

v) → Maximumsprinzip Bilder

vi) **Aufgabe 6.4 Residuen Berechnen**

Berechnen Sie die Residuen der folgenden Funktionen an all ihren isolierten Singularitäten:

i) $\frac{1}{z+z^2}$,

ii) $z\cos(\frac{1}{z})$,

iii) $\frac{z-\sin z}{z}$,

iv) $\frac{\cot z}{z^4}$.

Hinweis: Die Laurententwicklung des Kotangens um $z_0 = 0$ ist gegeben durch

$$\cot z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 - \frac{2}{945}z^5 - \frac{1}{4725}z^7 - \ldots$$

i) Residuen: $z_1 = 0$ Pol 1. Ordn, $z_2 = -1$, Pol 1. Ordn.

$$\mathrm{Res}(f(z)|z_1) = \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{1}{1+2z_1} = \underline{\underline{1}} \quad ✓$$

$$\mathrm{Res}(f(z)|z_2) = \frac{1}{1+2z_2} = \underline{\underline{-1}} \quad ✓$$

ii) $z_1 = 0$

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \dots$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{-2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{1}{z^2 2} + \frac{1}{24 z^4} \dots$$

$$z \cdot \cos\left(\frac{1}{z}\right) = z - \frac{1}{2z} + \frac{1}{24 z^3} - \dots$$

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f(z) | 0) = -\frac{1}{2}$$

iii) $z_1 = 0$:

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{z - \sin(z)}{z} = \frac{\frac{z^3}{6} - \frac{z^5}{120} + \dots}{z} = \frac{z^2}{6} - \frac{z^4}{120} + \dots$$

$\Rightarrow$ Hebbare Singularität $\Rightarrow$ $\operatorname{Res}(f(z) | 0) = 0$

iv) $$\frac{\cot z}{z^4} = \frac{\cos(z)}{\sin(z) z^4}$$

$z_1 = 0$ Pol 5. Ordn.

$z_k = k \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ Pol 1. Ordn.

$$\cot(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3} z - \frac{1}{45} z^3 - \dots$$

$$\frac{1}{z^4} \cot(z) = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{3z^3} - \frac{1}{45 z} - \dots \Rightarrow \operatorname{Res}(f(z) | 0) = -\frac{1}{45}$$

$$\operatorname{Res}(f(z) | z_k) = \frac{p(z_k)}{q'(z_k)} = \frac{\cancel{\cos(z_k)}}{\cancel{\cos(z_k)} z^4 + \underbrace{4 z^3 \sin(z_k)}_{0}} = \frac{1}{z_k^4} = \frac{1}{(k\pi)^4}$$

i. Aufgabe 12.2,

ii. Aufgabe 12.4.

Aufgabe 13.5 Weitere Aufgaben

(13.5a) Weitere gute Übungsaufgaben aus den Serien sind:

i. Aufgabe 3.5,

ii. Aufgabe 5.1,

iii. Aufgabe 5.2,

iv. Aufgabe 6.1,

v. Aufgabe 6.3,

vi. Aufgabe 6.4.

(13.5b) Lösen Sie den Midterm erneut (oder zum ersten Mal).

(13.5c) Lösen Sie die Prüfung vom Winter 2014 und die Prüfung vom Sommer 2014 im Skriptum von Prof. Dr. F. Da Lio ab Seite 106.